

Уважаемые участники олимпиады,

Перед тем как приступить непосредственно к решению задач – прочтите, пожалуйста, правила и рекомендации, подготовленные жюри специально для вас.

Правила и рекомендации для участников олимпиады

1. **Что можно иметь на столе?** При себе можно иметь ручку (чёрную или синюю), линейку, карандаш, цветные карандаши или фломастеры, точилку, ластик, обыкновенный калькулятор, ваш личный вариант заданий и бланк для решений, бутылку с водой и шоколадку.
2. **Можно оставить телефон в кармане?** В течение всей олимпиады не допускается использование и наличие при себе (в карманах) мобильных устройств, умных часов и прочих средств связи, а также программируемых калькуляторов. Их можно положить в закрытую сумку в выключенном состоянии. При нарушении этого правила участник может быть удалён из аудитории, а его работа – аннулирована без права обжалования.
3. **Чего ещё нельзя делать?** В течение всей олимпиады не допускается общение с другими участниками. За разговоры, передачу записок и другие подобные действия участник может быть удалён из аудитории, а его работа – аннулирована без права обжалования.
4. **Чем писать?** Решения и ответы записывать необходимо только ручкой. Использование карандашей допускается только при рисовании графиков, если имеется такая необходимость. Решения, записанные карандашами, проверяться не будут.
5. **Что можно писать?** В работе не допускаются никакие другие записи и рисунки кроме как решения задач и графики к ним. При наличии любых посторонних рисунков или записей работа может быть аннулирована полностью, т.к. они могут служить условным сигналом для идентификации личности кому-либо из организаторов или членов жюри.
6. **Есть ли черновик, проверяется ли он?** У каждого из вас есть бланк с листами для решений. Обратную сторону каждого листа вы можете использовать в качестве черновика. Черновики (=оборотные стороны листов) проверяться не будут, поэтому не забудьте перенести решения из черновика в чистовик. Если для решения вам потребуется больше одной страницы – используйте новый лист и указывайте номер листа, на котором членам жюри нужно искать продолжение решения.
7. **У меня есть больше одного решения, что делать?** При наличии нескольких решений в работе проверяется только первое, поэтому не забудьте зачеркнуть всё лишнее.
8. **Мне нужно сделать исправление, как?** Если вам необходимо зачеркнуть большой кусок решения, перечеркните его, пожалуйста, двумя линиями – крестом. Если вы передумаете и решите, что зачеркнутую ранее часть решения все-таки стоит отдать на суд жюри – припишите рядом с зачеркнутой частью «Считать не зачёркнутой» и подчеркните эту надпись. Если Вы снова передумаете – зачеркните надпись, тогда эта часть решения проверяться не будет.
9. **А что если у меня остались вопросы?** Если у вас появился вопрос по условию, вы обнаружили опечатку, вам стало плохо, вам нужно выйти и т.д. – поднимите руку. К Вам подойдёт организатор в вашей аудитории, и ответит на ваши вопросы или пригласит того, кто сможет Вам помочь.
10. **Что-нибудь ещё?** Мы советуем участникам сначала быстро ознакомиться со всеми задачами, чтобы оптимально распределить свои усилия между ними, а затем уже приступить к решению. Не волнуйтесь и не переживайте, не обязательно решить все задания – главное не упустить те из них, в которых вы можете показать себя наилучшим образом.

Успехов!

Задача 1, «Кто девушку ужинает, тот её и танцует» – 10 баллов

Главным производственным предприятием города Байкальска Иркутской области долгое время являлся печально известный Байкальский целлюлозно-бумажный комбинат. Известность этого комбината была печальна в связи с тем, что отходы от его производства попадали в Байкал, нанося серьёзный ущерб экологии этого уникального озера. Несмотря на многочисленные обращения защитников природы, окончательно остановить вредное производство удалось лишь в 2013 году. Проблема заключалась в том, что комбинат был градообразующим предприятием, то есть он кормил целый город. На момент остановки предприятия на нём трудились 2000 человек, а население города составляло 13 000 человек. Объясните, как так получается, что от одной шестой населения может зависеть благосостояние целого города?

Задача 2, «Многогранная личность» – 25 баллов

Вася хочет изготовить правильный многогранник из стали и покрыть его сплавом драгоценных металлов. Один кубический сантиметр стали стоит 1 рубль. Покрытие одним квадратным сантиметром сплава также обойдётся в 1 рубль. Технология производства следующая: отливается шар из стали, срезается лишний металл, на заготовку наносится тончайший слой сплава драгоценных металлов. Остатки стали, которые срезали с многогранника, приходится выбрасывать.

Удовлетворённость Васи многогранником зависит от того, насколько он сложный (сколько у него граней N) и насколько блестящий, что описывается следующей функцией:

$$U = \sqrt{N} \times S - M,$$

где M – затраты Васи на производство, а S – площадь поверхности.

Справка: правильный многогранник – это такой выпуклый многогранник, у которого все грани равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое количество рёбер.

1) (15 баллов) Если правильные многогранники, из которых может выбирать Вася, – это куб, тетраэдр (пирамида с треугольником в основании) и октаэдр (многогранник, гранями которого являются 8 равносторонних треугольников), какой многогранник выберет Вася?

2) (10 баллов) Какой многогранник выберет Вася, если он умеет делать все возможные правильные многогранники?

Справка:

Правильный многогранник – это выпуклый многогранник, состоящий из одинаковых правильных многоугольников и обладающий пространственной симметрией.

Формулы радиуса сферы, вписанной в:

$$\text{Додекаэдр} - r = \frac{a}{2} \sqrt{10 + \frac{22}{\sqrt{5}}}$$

$$\text{Икосаэдр} - r = \frac{a\sqrt{3}}{12} (3 + \sqrt{5})$$

Формулы радиуса сферы, описанной около:

$$\text{Додекаэдра} - R = \frac{a\sqrt{3}}{4} (1 + \sqrt{5})$$

$$\text{Икосаэдра} - R = \frac{a}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{2}}$$

Задача 3, «Какой товар, такие и издержки» – 20 баллов

Компания «Ёлки-иголки» занимается производством новогодних ёлок. На недавнем собрании обсуждались неудачные продажи в этом году: прибыль была отрицательной и составила –5 условных единиц. Компания необычная, её кривая предельных издержек имеет нестандартный вид:

$$MC(Q) = \begin{cases} 20 - 2Q, & 0 < Q < 5 \\ \frac{7Q}{10} - \frac{1}{2}, & 5 < Q < 15 \\ 30 - Q, & 15 < Q < 20 \\ \frac{2Q}{5}, & 20 < Q < 25 \\ 20, & Q > 25 \end{cases}$$

Кривая предельной выручки также имеет похожий специфический вид:

$$MR(Q) = \begin{cases} 2Q, & 0 < Q < 5 \\ \frac{41}{2} - \frac{7Q}{10}, & 5 < Q < 15 \\ Q - 10, & 15 < Q < 20 \\ 20 - \frac{2Q}{5}, & 20 < Q < 25 \\ 0, & Q > 25 \end{cases}$$

Причины столь плохих результатов были выявлены почти сразу: главный экономист компании пропускал лекции по микроэкономике в университете и что-то слышал про правило $MR = MC$, но совершенно не умеет им пользоваться. К тому же он перепутал графики $MR(Q)$ и $MC(Q)$! Совет сразу же уволил его и открыл вакансию нового главного экономиста, на которую Вы теперь претендуете. Все кандидаты должны решить следующие задачи (фирма может продавать нецелое количество ёлок: кому-то нужны только иголки):

- 1) (3 балла) Изобразить правильный график предельных издержек и предельной выручки.
- 2) (6 баллов) Найти количество ёлок, которое фирма произвела в прошлом году.
- 3) (8 баллов) Посчитав ожидаемую прибыль от выбранного им выпуска, бывший главный экономист решил воспользоваться правилом «Если нет разницы – зачем производить больше?». Сколько произвела фирма по его совету с учётом этого правила?
- 4) (3 балла) На сколько нужно изменить выпуск, чтобы наконец-то производить оптимальное количество ёлок (в сравнении с пунктом 3)? Какую прибыль получит фирма при таком выпуске?

Задача 4, «Сильная и независимая женщина» – 30 баллов

У Зои есть две радости в жизни: обнимашки и сладости. Также она иногда работает и получает доход в размере 50 000 у.е., который может потратить в своё удовольствие. Если она обнимается, но не ест сладкого, её удовольствие описывается функцией:

$$U(h) = -5000 + 65h - 3\sqrt{h} + 2h^2.$$

Если она поедает сладости в одиночестве, функция её удовольствия выглядит иначе:

$$U(s) = -12000 + 2160s - 18s^2.$$

Совмещать сладости и обнимашки она тоже любит, но только в определённой пропорции – за каждые два часа обнимашек ей надо съесть 3кг конфет, тогда каждый час будет приносить ей 1500 единиц удовольствия. Также во время обнимашек нужно поддерживать минимальную жизнедеятельность, на что уходит 500 у.е. в час. У источника обнимашек есть свои запасы конфет, из которых он готов отдавать Зое по полкило в час. Этих запасов хватит на первые 40 часов. В магазине конфеты стоят 750 у.е. за килограмм, но для оптовых покупателей цены другие – при покупке более 50 кг за раз килограмм конфет обходится всего лишь в 500 у.е.

Каждую сэкономленную 1 у.е. Зоя оценивает в 1 единицу удовольствия.

- а) (5 баллов) Выпишите функцию удовольствия Зои от совмещения сладостей и обнимашек.
- б) (15 баллов) Постройте график бюджетного ограничения Зои (линию, показывающую, какие наборы товаров может заполучить Зоя на её доход, полностью расходуя его).
- в) (10 баллов) Найдите и объясните оптимальное распределение её дохода между сладким, обнимашками и сэкономленными деньгами, при котором она получит максимальное удовольствие. Не забудьте указать как распределение, так и величину удовольствия.

Задача 5, «Тот, кто стучит в дверь» – 15 баллов

Гражданину Белякову 50 лет, он учитель химии в одной из городских старших школ. За эту работу он получает \$4000 в месяц. Кроме того, он подрабатывает на автомойке, где зарабатывает ещё примерно \$1000 в месяц. У него есть жена и сын-школьник, а также скоро появится дочь. После своего пятидесятого дня рождения гражданин Беляков узнал, что болен раком лёгких и ему осталось жить буквально полгода. Прикинув ожидаемые расходы на поддержание дома, автомобиль, образование для детей и прочее, он определил сумму, оставив которую он обеспечит своей семье безбедное будущее и жизнь на проценты по вкладам на долгие годы вперёд – \$737 000. Его текущая заработная плата не позволяет за прогнозируемое ему время накопить такую сумму денег, поэтому он решил пересмотреть своё отношение к жизни и попробовать использовать свой талант химика в полной мере, занявшись производством редкой и ценной субстанции. Производство субстанции сопряжено с определёнными рисками – за её специфические свойства она была запрещена, и её производство преследуется по закону. Однако познания гражданина Белякова в химии позволяют ему готовить продукт высочайшего качества и продавать его по цене значительно выше обычной – по \$2000 за унцию (эту сумму производитель получит на руки). За неделю на локальном рынке можно продать до 4 фунтов субстанции. Производство придётся открывать с партнёром, а прибыль от реализации в этом случае будет делиться между ними пополам. Чтобы освободить время для приготовления субстанции, гражданину Белякову придётся отказаться от работы на мойке, но из школы он уйти не может – он не может подставлять свою семью, а значит, должен держать свою новую деятельность в тайне от них, и работа в школе поможет это сделать. Даже в былые времена заработок нашего гражданина не позволял семье делать сбережений, а теперь ему и вовсе придётся тратить всю легальную зарплату на обязательные расходы по содержанию дома и семьи. Вдобавок ко всему остальному, ему нужно проходить ещё и дорогостоящее лечение, расходы на которое составляют \$10 000 в неделю.

- 1) (3 балла) Полиция в городе пока не очень сильно интересуется ограничением продажи субстанции, поэтому она достаточно редко находит точки её продажи и конфискует её – всего в 5 % случаев. За сколько недель гражданин Беляков сможет собрать нужную ему сумму, если больше ничего ему не мешает, а деньги ему придётся хранить в вентиляционной системе своего дома?
- 2) (9 баллов) Брат гражданина Белякова – сотрудник полиции – решил встать на тропу войны с субстанцией, увеличив процент конфискаций до 15. Кроме того, он решил искать главных виновников – производителей, из-за чего над нашим гражданином нависла угроза быть пойманным и отправленным в тюрьму. Поскольку работа оставляет следы, вероятность быть пойманным равна p на первой неделе производства и возрастает на 1 процентный пункт каждую неделю. Если производителя поймают, то у него заберут все деньги, которые он на этом заработал. Гражданин Беляков перфекционист. Узнав всё это в процессе обдумывания решения и посчитав всё, он понял, что рискует не заработать необходимой суммы за отведённое ему время (24 недели), и поэтому решил даже не открывать производство. При каких значениях p он мог принять такое решение?
- 3) (3 балла) Оглядываясь назад, гражданин Беляков понял, что мог бы давать частные уроки химии и зарабатывать на этом дополнительные \$3000 в месяц, которые мог бы сберегать на будущее. Инфляция в стране составляет 1 %, а процент по вкладам – 1,5. Начав сберегать в каком возрасте, наш гражданин смог бы получить на своём счету необходимую сумму к пятидесяти годам?