Московская олимпиада школьников по экономике

10—11 класс

Второй этап

Первый день

Дата написания	**21 февраля 2015 г.**
Количество заданий	**8**
Сумма баллов	**100**
Время написания	**3 часа**

Не пытайтесь читать задания до объявления начала написания тура.

Решения заданий выполняются на отдельном бланке.

Задачи 1—4 требуют только записи ответа, решение не проверяется.

Задача 1. Вклад Марьи (5 баллов)

В день своего восемнадцатилетия Марья открыла вклад в банке и положила на него некоторую сумму. Банк начислял на сумму вклада 10 % в конце каждого года перед очередным Днем рождения Марьи и прибавлял эти проценты к основной сумме (каждый следующий год проценты начислялись на бóльшую сумму, чем предыдущий). В каждый свой День рождения Марья добавляла на вклад 10 000 рублей, никаких других операций с деньгами на вкладе не производилось. Когда Марье исполнилось 22 года, она впервые не стала добавлять 10 000 рублей ко вкладу, а закрыла его. В этот момент на вкладе было 80 333 рубля. Какую сумму нужно было бы Марье положить в банк в день своего восемнадцатилетия, чтобы она принесла столько же денег за 4 года без пополнений вклада? Запишите ответ в рублях, при необходимости округлив его до целых.

Решение

Если бы Марья положила на счет сумму X и ничего не делала бы с ней в течение 4 лет, то она увеличилась бы в 1,1 раза (на 10 %) четырежды. В итоге она стала равна $X \times 1{,}1^4$. Составим уравнение:

$$X \times 1{,}1^4 = 80\,333.$$

Отсюда $X \approx 54\,869$.

Задача 2. Девяносто девять цен (5 баллов)

В магазине продаются 99 разных товаров. Магазин закупает товар i ($i = 1, 2, \ldots, 99$) по цене $500/i$ рублей. Если магазин назначит цену p на товар i, покупатели купят i/p^2 единиц этого товара. Магазин стремится получить максимальную прибыль (разницу между своими доходами и своими расходами на закупку) от перепродажи товаров. Допустим, магазин может назначать на товары любые цены. Какую цену он назначит на товар с номером i?

Решение

Если магазин назначит цену p_i за товар i, то будет куплено $q_i = i/p^2$ единиц товара. Тогда его прибыль от продажи этого товара будет равна

$$\pi_i = \frac{i}{p_i^2}\left(p_i - \frac{500}{i}\right) = \frac{i}{p_i} - \frac{500}{p_i^2}.$$

Проведем замену $t = 1/p_i$, получим $\pi_i = it - 500t^2$. Это квадратичная парабола с ветвями вниз, ее вершина находится в точке

$$t^\star = \frac{i}{1000}, \qquad p_i^\star = \frac{1000}{i}.$$

Задача 3. Двойной пирог (5 баллов)

Агриппина и Валентин делят вкусный пирог. Пирог представляет собой прямоугольник 100 см × 10 см и может быть разрезан на две части только вдоль короткой стороны так, чтобы длина каждой из сторон составляла целое число сантиметров. Одна половина пирога (50 см × 10 см) состоит из птичьего молока, а другая — из бисквита, при этом Агриппина больше любит птичье молоко, а Валентин — бисквит. Каждый из ребят из двух кусков всегда предпочитает тот, в котором больше его любимого ингредиента, а если любимого ингредиента в кусках поровну, то тот, который больше по площади.

Механизм дележа устроен следующим образом. Агриппина подбрасывает монетку, по результатам этого определяется очередность дальнейших ходов. Тот, кто выиграл жребий, разрезает пирог любым возможным способом на две части, после чего второй выбирает себе часть, а вторая часть остается разрезавшему. На сколько процентов площадь куска, доставшегося Агриппине, при благоприятном для нее исходе жребия будет больше, чем при неблагоприятном? При необходимости округлите ответ до целого числа процентов.

Решение

Пусть кто-то каким-то образом разрезал пирог. Тогда второй участник дележа будет поступать следующим образом. Если среди двух частей есть часть, в которой больше его любимого ингридиента, то он выберет именно эту часть. Если обе части содержат одинаковое количество его любимого ингридиента, то он выберет бóльшую по площади часть. Это означает, что тот, кто выбирает одну из двух частей, может гарантировать себе как минимум половину от общей массы своего любимого ингридиента при любом разрезе. Значит, тот, кто производит разрез, в лучшем случае может претендовать на 100 % любимого ингридиента плюс чуть меньше половины менее любимого ингридиента. Чтобы обеспечить себе максимально хороший результат, он должен разрезать пирог на два куска: 74 см × 10 см и 26 см × 10 см, где кусок 26 см × 10 см целиком состоит из нелюбимого ингридиента. Тогда разрезавший пирог получит кусок площадью 740 см^2 (причем он получит всю часть со своим любимым ингридиентом), а выбирающий одну из двух частей получит кусок пирога площадью 260 см^2. Поэтому при удачном жребии площадь доставшегося пирога будет на

$$\frac{740-260}{260}\times 100\,\% \approx 185\,\%$$

больше, чем при неудачном.

Задача 4. Два ковбоя (5 баллов)

Два ковбоя зашли в салун. У каждого из них в кармане по 5 монет. В салуне стоит музыкальный автомат и продается молоко. Прослушивание одной песни и кружка молока стоят по одной монете, можно прослушать только целое число песен и выпить целое количество кружек молока. Кружка молока приносит каждому из ковбоев по 2 единицы удовольствия, прослушивание одной песни приносит первому ковбою 1 единицу удовольствия, а второму — 2 единицы удовольствия. (Если один из ковбоев платит за прослушивание песни, второй также слышит ее.) Каждый из ковбоев потратил все свои деньги на молоко.

На следующий день ковбои согласовали действия так, чтобы удовольствие каждого из них было строго больше, чем в первый день. Какое максимальное количество кружек молока мог при этом выпить второй ковбой во второй день?

Решение

1) Допустим, *второй ковбой пьет 5 кружек молока во второй день*. Значит, он не слушает ни одной песни. Значит, чтобы ему стало строго лучше, чем в первый день, первый ковбой должен заказать хотя бы одну песню. Однако в этом случае удовольствие первого будет строго ниже, чем в первый день, так как песни приносят ему меньше удовольствия, чем молоко. Значит, в этой ситуации не может быть так, что удовольствие каждого из них строго больше во второй день, чем в первый.

2) Допустим, *второй ковбой пьет 4 кружки молока во второй день и слушает 1 песню*. Если первый ковбой не закажет ни одной песни, удовольствие второго будет равно 10, как и в первый день. Значит, первый должен заказать хотя бы одну песню. Обозначим, количество заказываемых им песен за $s_1 > 0$. Чтобы удовольствие первого было строго больше, чем в первый день, должно выполняться неравенство $1 + s_1 + 2(5 - s_1) > 10$, то есть $s_1 < 1$, что противоречит $s_1 > 0$. Значит, в этой ситуации не может быть так, что удовольствие каждого из них строго больше во второй день, чем в первый.

3) Приведем пример ситуации, когда *второй ковбой пьет 3 кружки молока во второй день*, и обоим лучше, чем в первый день. Пусть первый ковбой пьет 4 кружки и заказывает 1 песню, а второй пьет 3 кружки заказывает 2 песни. Тогда удовольствие первого будет равно $4 \times 2 + 3 \times 1 = 11 > 10$, а второго — $3 \times 2 + 3 \times 2 = 12 > 10$.

Ответ: 3 кружки.

Задачи 5—8 требуют записи подробного решения. Все действия в решении должны быть обоснованы. Ответ без обоснования, как правило, не оценивается, даже если он правильный.

Задача 5. Спринтеры (20 баллов)

Два ученика легкоатлетической школы олимпийского резерва, Аристарх и Платон, решили устроить между собой неофициальное соревнование — кто из них будет лучше бегать стометровку в течение летнего сезона. Их тренер Владимир Петрович сообщил, что в течение сезона ожидается 5 контрольных забегов, на каждом из которых будет фиксироваться время финиша Аристарха ($a_1, \ldots, a_5$) и Платона ($p_1, \ldots, p_5$), где $a_i > 0$, $p_i > 0$ — время финиша Аристарха и Платона на i-м забеге соответственно, $i = 1, \ldots, 5$. Спортсмены задумались, как им определить по этим результатам, кто из них лучше бегает. Предлагается 4 схемы.

1. Аристарх предлагает посчитать среднее арифметическое результатов и сравнить их.
2. Платон считает, что справедливо было бы сравнивать между собой только лучшее время Аристарха и Платона.
3. Владимир Петрович предлагает попробовать систему, похожую на систему оценок в прыжках в воду: отбросить лучший и худший результат каждого, а оставшиеся результаты сравнить по среднему арифметическому.
4. Жена Владимира Петровича Елена Никифоровна, узнав о споре, тоже предложила свою систему сравнения результатов. Она предлагает после каждого забега рассмотреть разность результатов атлетов на этом забеге (время Аристарха минус время Платона) и прибавить ее к разнице, накопленной за предыдущие забеги. Если после 5 забегов эта накопленная разность будет положительной, то выиграл Платон, если отрицательной — Аристарх, а если нулевой, то ничья.

Будем говорить, что две системы сравнения результатов *эквивалентны*, если для любого возможного набора результатов ($a_1, \ldots, a_5$) и ($p_1, \ldots, p_5$), обе системы отдают первенство одному и тому же участнику. Какие из четырех приведенных систем сравнения результатов эквивалентны, а какие — нет? Для каждой пары либо докажите эквивалентность, либо приведите контрпример.

Решение

Покажем сначала, что первый и четвертый способы сравнения результатов эквивалентны. Пусть $a_1, \ldots, a_5$ — результаты Аристарха, а $p_1, \ldots, p_5$ — результаты Платона. Разность сравниваемых величин при использовании первой схемы равна

$$\frac{a_1 + \ldots + a_5}{5} - \frac{p_1 + \ldots + p_5}{5} = \frac{1}{5} \cdot \left((a_1 - p_1) + \ldots + (a_5 - p_5)\right).$$

Но последняя сумма — это ровно одна пятая от накопленной разности результатов, используемой в четвертой схеме сравнения, а значит она принимает тот же самый знак. Следовательно, **при любом наборе результатов забегов первая и четвертая схемы определят одного и того же победителя**.

Чтобы доказать, что две схемы неэквиваленты, приведем набор результатов, на котором эти схемы отдают предпочтение разным участникам.

1) Первая и вторая схемы неэквивалентны. Пусть

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 10, \quad p_1 = p_2 = p_3 = 10, \quad p_4 = 9{,}9, \quad p_5 = 11.$$

Тогда при использовании первой схемы сравнения результатов победит Аристарх, а при второй — Платон.

2) Первая и третья схемы неэквивалентны. Положим

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 10, \quad p_1 = p_2 = 10, \quad p_3 = p_4 = 9{,}9, \quad p_5 = 11.$$

Тогда при использовании первой схемы сравнения результатов победит Аристарх, а при третьей — Платон.

3) Вторая и третья схемы неэквивалентны. Рассмотрим набор результатов

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 10, \quad p_1 = p_2 = 10, \quad p_3 = 9{,}9, \quad p_4 = p_5 = 11.$$

Тогда при использовании второй схемы сравнения результатов победит Платон, а при третьей — Аристарх.

Поскольку первая схема эквивалентна четвертой и не эквивалентна никакой другой, то четвертая схема не эквивалентна ни второй, ни третьей схеме.

Схема оценивания

1. Доказательство эквивалентности 1 и 4 схем сравнения результатов оценивается в **7 баллов**.
2. Доказательство неэквивалентности (контрпримеры) схем 1 и 2 (или 4 и 2), 1 и 3 (или 4 и 3), 2 и 3, оцениваются в **3 балла** каждое.
3. *«Поскольку первая схема эквивалентна четвертой и не эквивалентна никакой другой, то четвертая схема не эквивалентна ни второй, ни третьей схеме»* — это рассуждение дает оставшиеся **4 балла**.
4. Если участник вместо предыдущего утверждения приводил еще два контрпримера, они оценивались по **2 балла** каждый.

Меньшее время в беге считается лучшим, но многие участники принимали за лучшее время большее. В зависимости от того, повлияло ли это на дальнейшие рассуждения, данная ошибка стоила от **0 до –3 баллов** за пункт.

Задача 6. Расселение (20 баллов)

Студент	Предпочтения
Алексей	1 > 2 > 3 > 4
Борис	1 > 3 > 4 > 2
Владимир	3 > 1 > 2 > 4
Георгий	4 > 1 > 2 > 3

Алексей, Борис, Владимир и Георгий поступили в университет и получили право жить в общежитии. На данный момент в общежитии свободны как раз 4 места в 4 разных комнатах, в которых уже живут другие студенты. Ребята имеют различные предпочтения относительно соседей, с которыми они хотели бы жить, и потому различные предпочтения относительно четырех имеющихся мест. Информация о предпочтениях приведена в таблице справа.

Запись 1 > 3 > 4 > 2, например, означает, что для Бориса первая комната лучше, чем третья, та, в свою очередь, лучше, чем четвертая, и, наконец, четвертая лучше, чем вторая.

Назовем распределение четверых ребят по комнатам *неэффективным*, если они могут поменяться комнатами так, чтобы никому не стало хуже и хотя бы одному из них стало лучше. В противном случае будем называть распределение *эффективным*.

а) Является ли эффективным распределение (А – 2; Б – 3; В – 4; Г – 1)?

б) Сколько всего существует эффективных распределений?

Решение

а) Это распределение не является эффективным, так как если Борис переедет в комнату 1, Владимир переедет в комнату 3, а Георгий — в комнату 4, то этим троим ребятам станет строго лучше, а Алексею будет не хуже (так как он останется в той же комнате).

б) Проведем организованный перебор.

1) Алексей живет к комнате 4. Значит, Георгий — не в комнате 4. Следовательно, если Алексей и Георгий поменяются комнатами, им обоим станет лучше (а остальным будет не хуже). Значит, любое такое распределение неэффективно.

2) Алексей живет в комнате 3. Значит, Владимир живет не в комнате 3. Если он живет в комнатах 1 или 2, он может поменяться с Алексеем, и обоим станет лучше. Если он живет в комнате 4, он может поменяться с Георгием, и обоим станет лучше. Значит, любое распределение, при котором Алексей живет в комнате 3, неэффективно.

3) Алексей живет в комнате 2. Значит, остальные ребята занимают комнаты 1, 3 и 4. Заметим, что при распределении (Б – 1;В – 3;Г – 4) каждый из трех остальных ребят получает лучшую, со своей точки зрения, комнату. Поэтому распределение (А – 2;Б – 1;В – 3;Г – 4) эффективно, и, если Алексей живет в комнате 2, эффективно только это распределение.

4) Алексей живет в комнате 1. Нетрудно видеть, что распределения (А – 1; Б – 2; В – 3; Г – 4), (А – 1; Б – 3; В – 2; Г – 4) и (А – 1; Б – 4; В – 3; Г – 2) эффективны, а распределения (А – 1; Б – 3; В – 4; Г – 2), (А – 1; Б – 2; В – 4; Г – 3) и (А – 1; Б – 4; В – 2; Г – 3) — нет. Таким образом, существует 4 эффективных распределения.

Схема оценивания

а) За первый пункт задачи можно было максимально получить **4 балла**. Эти баллы ставились, если участник писал, что распределение неэффективно, и правильным образом объяснял, почему это так. Примером такого объяснения мог служить любой обмен комнатами между ребятами, когда кто-то выигрывал, но никто не проигрывал.

б) Во втором пункте задачи ставился **1 балл** за каждое правильно найденное эффективное распределение. Если школьник считал некоторые распределения эффективными, хотя они таковыми не являлись, то баллы могли сниматься в зависимости от того, сколько подобных ошибок было допущено. Еще **1 балл** ставился за каждое из объяснений, почему распределение будет являться эффективным. Оставшиеся **8 баллов** ставились за объяснение того, почему другие распределения являться эффективными не будут. Если школьник разбирал часть случаев, то часть баллов ставилась ему пропорционально.

Задача 7. Рейтинги (20 баллов)

Чтобы определить стоимость того или иного финансового инструмента (ценной бумаги), нужно учесть множество факторов, характеризующих как сам инструмент и его эмитента (того, кто выпустил ценную бумагу), так и общую ситуацию в экономике. Провести такую оценку, однако, иногда очень сложно, и не все инвесторы в каждом случае могут позволить себе это сделать. Чтобы лучше понять риски вложения, они зачастую опираются на рейтинг, присвоенный той или иной ценной бумаге независимым *кредитным рейтинговым агентством*. Эта оценка обычно выглядит как комбинация букв, по которой можно определить, как высоко рейтинговое агентство оценивает риски вложения в тот или иной инструмент. Например, AAA — самый лучший рейтинг (надежная, стабильная компания), а C — самый худший (вероятность банкротства очень высока). Существует две альтернативные формы устройства рынка рейтингов. При первой схеме инвесторы платят за доступ к рейтингу, при этом для компаний, которым присваиваются рейтинги, эта услуга бесплатна. При второй схеме только компания платит за получение своего рейтинга, а инвесторы имеют свободный доступ к нему.

а) Первая схема была доминирующей на рынке рейтингов до начала 1970-х годов, а после этого периода почти во всех агентствах ей на смену пришла вторая. Предположите, почему это могло произойти? Приведите один самый важный, на ваш взгляд, аргумент.

б) Есть мнение, что вторая схема подвержена конфликту интересов. Объясните, в чем он заключается.

в) В наше время есть три крупнейших мировых рейтинговых агентства: «Standard & Poor's», «Moody's Investors Service» и «Fitch Ratings» (все три американские), которые занимают примерно 95 % рынка. Новым компаниям не удается захватить сколько-нибудь существенную рыночную долю, несмотря на то, что, казалось бы, затраты на старт подобного бизнеса не очень высоки. Предположите, что может быть таким прочным барьером для входа на рынок рейтингов?

Решение

а) Технологические изменения, происходившие в мире в то время, оказали существенное влияние на рынок рейтингов. Благодаря техническому прогрессу, копирования полученной информации стало значительно дешевле, поэтому один инвестор, получив рейтинги, мог дальше заняться «пиратством» почти без издержек. Это делало систему, при который платит инвестор за доступ к рейтингам, бессмысленной, поэтому рейтинговые агентства перешли на систему, когда платит рейтингуемая компания.

б) Если компании платят за рейтинг, они получают ложные стимулы платить за сфабрикованное завышение рейтинга, чтобы их стоимость была больше. Рейтинговые агентства в таком случае ввязываются в «неценовую конкуренцию»: больше компаний обратятся к тому из них, кто ставит более благоприятные рейтинги. Таким образом, у агентств есть противоречащие друг другу стимулы: с одной стороны, нужно ставить справедливые рейтинги (чтобы заработать хорошую репутацию), а с другой, заработать побольше денег.

в) По нескольким причинам, включая описанную в предыдущем пункте, на рынке агентств критическое значение имеет репутация. Эти три агентства уже завоевали доверие инвесторов, поэтому новые агентства не могут войти на рынок.

Схема оценивания

а) Всего **5 баллов**. За указание идеи о распространении информации ставился максимальный балл. Ответ, содержавший утверждение «в 70-х увеличилось количество компаний (инвесторов)», не засчитывался, поскольку непонятно, как именно это приводит к отмене старой схемы и вводу новой (например, почему рейтинговые агентства не начали брать деньги с обеих сторон).

б) Стоимость пункта — **10 баллов**, которые ставятся при четком указании двух противоречащих друг другу интересов, возникающих у агентства, и объяснения причин их возникновения.

в) Стоимость пункта — **5 баллов**, которые ставились при наличии правильной идеи.

Задача 8. Типичные пингвины (20 баллов)

На рынке плюшевых пингвинов «Тоша» действует фирма «ВОШ», а фирма «МОШ» готовится войти на рынок и стать ее конкурентом. Взаимодействие на рынке происходит так: сначала «ВОШ» выбирает объем выпуска $q_1 > 0$ тыс. шт. и объявляет его, а затем «МОШ», узнав объем выпуска конкурента, решает, входить на рынок или нет. Если она входит, то производит $q_2 > 0$ тыс. шт., а если не входит, то $q_2 = 0$. Чтобы попасть в перечень фирм, имеющих право производить плюшевых пингвинов, «МОШ» должна получить лицензию правительства («ВОШ» в лицензии не нуждается). Правительство выдает лицензии бесплатно, но только тем фирмам, у которых хорошо организовано производство, так что фирме «МОШ» придется потратить 100 тыс. рублей на начальные инвестиции, чтобы начать работать. «МОШ» решит войти на рынок, *только* если разница между доходами и расходами на производство пингвинов будет *превосходить* эти затраты. Цена одного плюшевого пингвина формируется исходя из объема предложения обеих фирм и равна $P = (110 - q_1 - q_2)$ руб. Производство типичного пингвина обходится любой из фирм в 10 руб., фирмы при принятии решений учитывают их последствия и стараются получить как можно бо́льшую прибыль (разницу между доходами и расходами). Сколько плюшевых пингвинов произведет фирма «ВОШ»?

Решение

Поскольку фирма «ВОШ» первой принимает решение, она может предсказать поведение фирмы «МОШ». Выбирая q_2, фирма «МОШ» максимизирует функцию

$$\pi_2 = \begin{cases} (110 - q_1 - q_2)q_2 - 10q_2 - 100, & \text{если } q_2 > 0, \\ 0, & \text{если } q_2 = 0. \end{cases}$$

Если фирма решит выбрать положительное q_2, то ее прибыль — парабола с ветвями вниз относительно q_2 и вершиной в точке $q_2^\star = 50 - q_1/2$. Максимальная ее прибыль в этом случае составит (в тысячах рублей)

$$\pi_2^\star = (100 - q_1 - (50 - q_1/2))(50 - q_1/2) - 100 = (50 - q_1/2)^2 - 100.$$

Заметим, что эта прибыль положительна при $q_1 < 80$, то есть при $q_1 \geqslant 80$ фирма «МОШ» не войдет на рынок. Таким образом, оптимальный выбор второй фирмы задается такой зависимостью:

$$q_2 = \begin{cases} 50 - q_1/2, & \text{если } q_1 < 80, \\ 0, & \text{если } q_1 \geqslant 80. \end{cases}$$

Зная реакцию фирмы «МОШ», фирма «ВОШ» может принять одно из двух решений:

1) Производить меньше 80 единиц продукции и допустить вход на рынок фирмы «МОШ». Тогда ее прибыль составит

$$\pi_1 = (100 - q_1 - (50 - q_1/2))q_1 = (50 - q_1/2)q_1.$$

Это парабола с ветвями вниз и вершиной в точке $q_1^\star = 50$. Прибыль фирмы равна $\pi_1^\star = 1250$.

2) Произвести $q_2 \geqslant 80$ и остаться единственной фирмой на рынке. В этом случае ее прибыль составит

$$\pi_1 = (100 - q_1)q_1.$$

Это парабола с ветвями вниз с вершиной в точке $q_1 = 50$, однако эта точка фирме недоступна (при $q_1 = 50$ вторая фирма войдет на рынок), а самая лучшая из доступных точек $q_1^\star = 80$. В этом случае прибыль равна $\pi_1^\star = 1600$, что больше, чем прибыль в варианте 1).

Ответ: 80

Схема оценивания

Если правильно найдена зависимость выпуска фирмы «МОШ» от выпуска фирмы «ВОШ» $q_2 = 50 - q_1/2$ в случае входа на рынок, ставилось **4 балла**. Еще **4 балла** ставилось, когда было посчитано, при каких значениях q_1 фирма «МОШ» вообще не войдёт на рынок ($q_1 \geqslant 80$). **6 баллов** ставилось, когда правильно была выписана функция прибыли фирмы «ВОШ» с учётом выпуска фирмы «МОШ» ($\pi_1 = (50 - q_1/2)q_1$). Еще **2 балла** добавлялось, если правильно находился максимум этой функции ($q_1 = 50$). Наконец, еще **4 балла** ставились, когда правильно рассматривался вариант выбора фирмой «ВОШ» такого производства, что фирма «МОШ» не войдет на рынок. В этом случае фирме «ВОШ» нужно произвести $q_1 = 80$. Для получения полного балла также нужно было показать, что прибыль «ВОШ» в этом случае становится больше.

Типичной ошибкой было рассмотрение задачи фирмы «ВОШ» без учета фирмы «МОШ». Если участник решал подобную задачу, а потом для найденного количества находил выпуск фирмы «МОШ», то баллы не ставились.