

8—9 класс

Второй этап

Первый день

Дата написания	21 февраля 2015 г.
Количество заданий	8
Сумма баллов	100
Время написания	3 часа

Решения

Задачи 1—4 требуют только записи ответа, решение не проверяется.

Задача 1. Вклад Ивана**(5 баллов)**

В день своего восемнадцатилетия Иван открыл вклад в банке и положил на него некоторую сумму. Банк начислял на эту сумму 10 % в конце каждого года перед очередным Днем рождения Ивана и прибавлял эти проценты к основной сумме вклада (следовательно, каждый следующий год проценты начислялись на бóльшую сумму, чем предыдущий). Никаких других операций с деньгами на вкладе не производилось. Когда Ивану исполнилось 22 года, он сразу же закрыл вклад, дождавшись очередного начисления процентов. В этот момент на вкладе было 36 602,5 рубля. Какую сумму Иван положил в банк изначально? Запишите ответ в рублях, при необходимости округлив его до целых.

Решение

Пусть искомая сумма равна X . Тогда после каждого начисления процентов она увеличивалась на 10 %, то есть в 1,1 раза. Всего начислений было 4, так что

$$X \times 1,1^4 = 36\,602,5.$$

Отсюда $X = 25\,000$.

Задача 2. Дели и выбирай**(5 баллов)**

Старший и младший брат делят вкусный пирог. Каждый хочет съесть как можно больший кусок пирога, при этом пирог одинаковый со всех сторон, так что имеет значение только доля, которую съест каждый. Механизм дележа устроен следующим образом. Сначала старший брат подбрасывает монетку, по результатам этого определяется очередность дальнейших ходов. Тот, кто выиграл жребий, разрезает пирог любым способом на две части, после чего второй брат выбирает себе часть, а вторая часть остается разрезавшему. Предположим, что у старшего брата есть фальшивая монета, на обеих сторонах которой нарисован орел, а младший брат об этом не знает. Старший брат решает использовать фальшивую монету, чтобы гарантированно получить выгодный ему результат жребия. На какое максимальное количество процентов может в результате этого трюка измениться его доля пирога? При необходимости округлите ответ до целого числа процентов.

Решение

Пусть один из братьев каким-то образом разрезал пирог. Тогда второй брат, действуя рационально, выберет бóльшую часть, если одна часть больше другой, и любую из частей, если обе части одинаковы по размеру. Это означает, что тот, кто выбирает одну из двух частей, может гарантировать себе как минимум половину пирога при любом произведенном другим братом разрезе. Значит, тот, кто производит разрез, в лучшем случае может претендовать на половину пирога. Но половину пирога он может обеспечить, для этого ему надо разрезать пирог на две равные по объему части. Следовательно, и тот, кто производит разрез, и тот, кто выбирает одну из двух частей, получат ровно по половине пирога. Поэтому не имеет значения, кто выиграл, а кто проиграл подбрасывание монетки — в любом случае оба брата получат половину пирога.

Ответ: на 0%.

Задача 3. Господин Гаджет**(5 баллов)**

Господин Гаджет является единственным продавцом гаджетов. Если он установит на свою продукцию цену $p \leq 100$ рублей за штуку, то у него купят $100 - p$ единиц продукции (в ином случае не купят ничего). Чтобы произвести q единиц продукции, требуется q^2 микросхем, каждая из которых стоит 9 рублей. Господин Гаджет стремится произвести столько гаджетов, чтобы его прибыль (разница между доходами и расходами) была максимальной. Чему будет равна максимальная прибыль?

Решение

В случае $p > 100$ господин Гаджет ничего не продаст и его прибыль будет равна 0. Рассмотрим случай $p \leq 100$. В этом случае $p = 100 - q$ — цена, которую готовы заплатить потребители при покупке q единиц продукции. Прибыль тогда равна

$$(100 - q)q - 9q^2.$$

Это парабола с ветвями вниз, ее вершина находится в точке $q = 5$, прибыль равна 250.

Задача 4. Два ковбоя**(5 баллов)**

Два ковбоя зашли в салун. У каждого из них в кармане по 5 монет. В салуне стоит музыкальный автомат и продается молоко. Прослушивание одной песни и кружка молока стоят по одной монете, можно прослушать только целое число песен и выпить целое количество кружек молока. Кружка молока приносит каждому из ковбоев по 2 единицы удовольствия, прослушивание одной песни приносит первому ковбою 1 единицу удовольствия, а второму — 2 единицы удовольствия. (Если один из ковбоев платит за прослушивание песни, второй также слышит ее.) Каждый из ковбоев потратил все свои деньги на молоко.

Могли ли ковбои договориться таким образом, чтобы удовольствие каждого было строго больше? Если не могли, напишите «нет», а если могли, то приведите пример такой договоренности в виде (m_1, m_2, s_1, s_2) , где m_1 и m_2 — количество выпитого первым и вторым ковбоем молока, а s_1 и s_2 — количество заказанных первым и вторым ковбоем песен. (Изначальная комбинация в этом виде записывается как $(5, 5, 0, 0)$.)

Решение

Могли.

Удовольствие первого ковбоя можно посчитать по формуле $U_1 = 2m_1 + s_1 + s_2$, а удовольствие второго ковбоя равно $U_2 = 2m_2 + 2(s_1 + s_2)$. Тогда в изначальном варианте удовольствие каждого ковбоя равно 10. Рассмотрим, например, четверку чисел $(4, 3, 1, 2)$, при которой каждый ковбой тратит все свои 5 монет. В этом случае удовольствие первого ковбоя будет равно $U_1 = 2 \times 4 + 1 + 2 = 11$, а удовольствие второго ковбоя будет равно $2 \times 3 + 2 \times (1 + 2) = 12$, то есть каждому ковбою стало лучше, чем было. Можно построить и другие примеры подходящих распределений монет.

Почему так происходит? Заказывая две песни вместо двух кружек молока, второй ковбой не меняет свое удовольствие (кружка и песня стоят одинаково и приносят одинаковое удовольствие), но повышает удовольствие первого ковбоя на две единицы. Второй ковбой может ответить взаимностью: заказав одну песню вместо кружки молока, он уменьшит свое удовольствие на единицу (но всё равно будет в плюсе в результате действий второго ковбоя), но увеличит удовольствие второго. Максимизируя не только свое удовольствие, каждый ковбой улучшает общую ситуацию.

Задачи 5—8 требуют записи подробного решения. Все действия в решении должны быть обоснованы. Ответ без обоснования, как правило, не оценивается, даже если он правильный.

Задача 5. Тугрики и еврики**(15 баллов)**

С наступлением нового года мистер Франк решил подвести итоги года прошедшего. Ровно год назад он пришел в отделение банка с целью взять два кредита: один для покупки машины, а другой — на образование сыну. Изучив условия кредитов, предлагаемых банком, он решил взять сумму 120 000 *тугриков* под 32 % годовых, а также эквивалент этой суммы в *евриках* под 10 % годовых. Обменный курс на тот момент составлял 60 тугриков за 1 еврик. Срок погашения обоих кредитов — один год, то есть вернуть оба кредита с процентами нужно сейчас. Считайте, что в любой момент можно менять валюты в любую сторону по действующему на этот момент валютному курсу.

В середине года еврики неожиданно подорожали относительно тугриков на X %. Какие значения может принимать X , если известно, что кредит в тугриках оказался выгоднее кредита в евриках?

Решение

Взяв в банке 120 000 тугриков, мистер Франк должен заплатить в конце $120\,000 \times 1,32 = 158\,400$. Эквивалентом изначальной суммы в евриках было $120\,000/60 = 2\,000$ евриков. Значит, через год он должен вернуть $2\,000 \times 1,10 = 2\,200$ евриков, что на этот момент эквивалентно $2\,200 \times 60 \times (1 + X/100)$ тугриков. Чтобы кредит в тугриках оказался выгоднее, выплата по нему должна быть меньше, то есть должно быть выполнено $158\,400 < 2\,200 \times 60 \times (1 + X/100)$. Решая это неравенство, получаем $X > 20$ %.

Схема оценивания

- Нахождение итоговой стоимости первого кредита (в тугриках) — **3 балла** (из них 1 снимается в случае арифметической ошибки).
- Вычисление эквивалента начальной суммы (в евриках) — **1 балл**.
- Нахождение итоговой стоимости второго кредита (в евриках) — **3 балла** (из них 1 снимается в случае арифметической ошибки).
- Выражение итоговой стоимости второго кредита через тугрики — **3 балла** (из них 1 снимается в случае арифметической ошибки).
- Составление и решение неравенства относительно нового курса евриков — **5 баллов** (из них 2 снимается в случае арифметической ошибки).

Задача 6. Филолог Сергей

(21 балл)

Выпускник филологического факультета Сергей подрабатывает двумя видами деятельности. Во-первых, он дает частные уроки русского языка и литературы. Каждый урок длится 1,5 часа, Сергей зарабатывает 2000 рублей за каждый урок. Во-вторых, Сергей осуществляет редакторскую правку материалов в крупном СМИ. За один материал Сергею платят 900 рублей. Продуктивность Сергея в правке материалов падает по ходу дня: в течение первых 2 часов работы над материалами он тратит на статью 20 минут, в течение следующих 2 часов — по 30 минут на статью, дальше — по часу на статью. Сергей работает не более 8 часов в день и может делить их между видами деятельности произвольным образом (с учетом того, что количество уроков, как и количество отредактированных статей, должно быть целым). Какую максимальную сумму денег он может заработать за день? Укажите ответ в рублях.

Решение

Всего Сергей может провести от 0 до 5 уроков. Составим таблицу:

Уроки	Часы на уроки	Часы на статьи	Статьи	Заработок
0	0	8	14	12 600
1	1,5	6,5	12	12 800
2	3	5	11	13 900
3	4,5	3,5	9	14 100
4	6	2	6	13 400
5	7,5	0,5	1	10 900

При построении таблицы считается, что Сергей работает непрерывно за исключением, возможно, времени в конце дня, которого недостаточно даже для редактирования еще одной статьи. Получаем, что Сергею нужно провести 3 урока и потратить 3,5 часа на редактирование статей. Он заработает 14 100 рублей.

Схема оценивания

В работах встречалось два типа решений. Первый тип решений — перебор различных возможных случаев. Второй тип решений — решения, основанные на сравнении предельного дохода от каждого из двух видов деятельности.

Основная встречающаяся ошибка при переборе вариантов — это пропуск отдельных случаев. Если задача была в целом решена и был получен правильный ответ, то отсутствие рассмотрения каждого неоптимального случая приводило к уменьшению максимальной оценки на **2 балла**. Арифметическая ошибка при рассмотрении неоптимального случая стоила **–2 балла**. Если задача была в целом не решена (например, не был получен правильный ответ, не было описано множество возможных стратегий и т. п.), но был правильно посчитан доход при отдельных стратегиях, то правильное рассмотрение каждого такого случая приносило **+1 балл**, за оптимальный случай **+2 балла** (но не более 10 баллов в сумме).

В ряде работ не была учтена возможность деления часа при редактировании статей, то есть не было учтено, что в самом начале за 20 минут (за 30 минут через 2 часа) можно успеть отредактировать одну статью. Если всё остальное при таком предположении было сделано правильно, то такое решение оценивалось в 10 баллов.

Что касается решений, связанных со сравнением предельного дохода, то большинство школьников, пошедших по этому пути, упускали из виду, что необходимо учитывать не только получа-

емый доход, но и ограничения по времени, накладываемые выбором той или иной стратегии. Недостаточно сказать: «Так как в течении первых двух часов работа над статьями принесет 2 700 рублей в час, а репетиторство — 2000 рублей за полтора часа, то Сергей точно два часа будет работать над статьями». Ведь, может быть, такое решение приведет к тому, что Сергей лишит себя возможности в дальнейшем выбрать оптимальную стратегию. То, что множество возможных стратегий в результате такого выбора не сокращается, как минимум нуждается в пояснениях. Если таких пояснений не было, то автор штрафовался на **2 балла** при каждом использовании подобных утверждений, а правильное в остальном решение могло претендовать на **15-17 баллов**. Если при этом не была учтена возможность деления часа, то оценка снижалась до **10 баллов**.

Задача 7. Импортозамещение**(21 балл)**

Прочитайте следующее рассуждение. Есть ли в выводах (выделены курсивом) его автора экономические ошибки? Если вы считаете, что есть, то перепишите фрагменты текста, в которых содержатся неверные утверждения, и объясните, почему вы так считаете.

Наша фирма производит товар, у которого на рынке есть множество иностранных аналогов; с другой стороны, мы, в отличие от других фирм в нашей отрасли, вообще не используем в производстве импортные материалы, не покупаем импортные станки и не нанимаем иностранных рабочих. *Поэтому удешевление национальной валюты не принесет нам никакого вреда, а наоборот, пойдет нам только на пользу: импортные аналоги станут дороже, поэтому потребители переключатся на наш товар, что увеличит нашу выручку, при этом наши издержки (в расчете на единицу продукции) не изменятся.*

Примечание: если для анализа выводов вы будете использовать понятие ставки процента по кредитам, то считайте для простоты, что она фиксирована и не зависит от колебаний валютного курса.

Решение

Рассуждение неверно, так как не только цены на импортные факторы производства (выраженные в национальной валюте), но и цены на отечественные факторы производства изменятся в результате падения курса национальной валюты. Действительно, после падения курса и подорожания иностранных факторов отечественные фирмы, которые раньше использовали иностранные факторы, теперь будут покупать отечественные, в результате чего спрос на них повысится, а цены вырастут.

Кроме того, в новых условиях увеличится экспорт отечественных факторов производства в другие страны, что уменьшит внутреннее предложение этих факторов и также создаст давление на их цены в сторону повышения.

Схема оценивания

- За правильно найденную ошибку в тексте ставилось **6 баллов**. Подходящими фразами могли служить фразы «удешевление национальной валюты не принесет нам никакого вреда» и «наши издержки (в расчете на единицу продукции) не изменятся».
- Далее ставилось **9 баллов**, если правильно объяснялась хотя бы одна из причин, по которым издержки фирмы вырастут. Подходящими были следующие объяснения.
 1. Спрос на отечественные ресурсы вырастет вслед за ростом цены товаров-заменителей (импортных факторов). Поэтому цена на отечественные факторы вырастет, а это повысит издержки фирмы.
 2. Отечественные факторы производства будут теперь экспортироваться за рубеж. Поэтому их предложение на отечественном рынке сократится, а цена на них вырастет, а это повысит издержки фирмы.

Ещё **6 баллов** ставилось, если были написаны оба объяснения.

Задача 8. Франчайзинг**(23 балла)**

Некоторые крупные сети ресторанов (а также другие виды бизнеса) не владеют всеми своими заведениями, а продают право пользоваться своей торговой маркой другим предпринимателям. Такая практика называется *франчайзинг*. Так, если вы хотите открыть ресторан «Макдоналдс» в Москве, вам не нужно устраиваться туда на работу — можно *купить франшизу* (заплатить владельцу бренда фиксированную сумму сразу и/или часть выручки потом) и продавать стандартные блюда под торговой маркой этой известной сети ресторанов. При этом вы будете получать все доходы и нести все расходы от деятельности ресторана, выплачивая владельцу марки некоторое вознаграждение. В этой задаче вам нужно обсудить различные аспекты такой практики.

а) Какие положительные и отрицательные особенности данного механизма вы видите? Рассмотрите ситуацию как со стороны владельца торговой марки, так и со стороны покупателя франшизы, приведите не более двух положительных и отрицательных особенностей для каждой из сторон, которые кажутся вам наиболее важными. Ситуацию владельца марки нужно сравнивать с самостоятельным открытием им ресторана, а ситуацию владельца открываемого ресторана — с вариантом использования им собственного нового бренда.

б) Схема выплат за франшизу может быть устроена по-разному: так, компания — владелец марки может потребовать заплатить большую сумму при открытии предприятия под ее брендом, а потом брать небольшой процент с продаж. Можно поступить по-другому: требовать не большой первоначальный взнос, а существенную долю дальнейшей прибыли. Тем не менее, первоначальный взнос, как правило, существует и является довольно существенным (по некоторым данным, для «Макдоналдс» он может составлять около 1 миллиона долларов США), при этом выбирается для каждого клиента индивидуально. В чем заключаются преимущества этого варианта для владельца торговой марки?

Решение

а) Среди плюсов для владельца марки можно отметить следующие:

- возможность одновременного открытия множества точек;
- личная выгода создает стимул для предпринимателя достигать в «своем» ресторане наибольшей эффективности, эти стимулы могут быть выше, чем у наемного менеджера ресторана.

Плюсы для покупателя франшизы:

- возможность пройти «школу» предпринимательства, обучение делу, не неся ответственность за маркетинг и затраты, связанные с брендом;
- доступ к технологиям крупной фирмы и прочая поддержка с ее стороны.

Минусы для владельца марки:

- риск доверить бренд плохому предпринимателю, репутация может пострадать, если фирма будет работать плохо;
- фирма получит не всю возможную прибыль — может быть, меньше, чем получила бы, открыв ресторан самостоятельно.

Минусы для покупателя франшизы:

- риск взять в аренду недоработанные технологии (при заключении контракта только владелец марки может знать все особенности производства);
- ограниченность действий: арендатор вынужден придерживаться исходной политики фирмы.

б) Первый взнос — способ преодоления асимметрии информации: владелец марки при заключении контракта может не знать всех мотивов покупателя франшизы; большой первоначаль-

ный взнос — сигнал о серьезных намерениях со стороны арендатора. Кроме того, даже покупатель с серьезными намерениями может потерпеть неудачу в будущем бизнесе, в этом случае у владельца марки останется хотя бы первоначальный взнос.

При этом разные предприниматели могут позволить себе заплатить за франшизу разные суммы: это зависит от месторасположения будущего ресторана, оценки спроса и т. п., поэтому владельцу марки имеет смысл назначать разную плату для разных покупателей, чтобы максимизировать свою прибыль.

Схема оценивания

а) 16 баллов за пункт. За каждую из 4 частей ответа на первый пункт можно получить до **4 баллов**, при этом в первых двух случаях ключевыми считаются две идеи (для полного балла нужно указать их), а для третьего и четвертого случая — только одна (для полного балла можно указать любую).

б) 7 баллов за пункт. **2 балла** за идею о сигнале, **3 балла** за идею о страховке от неудачи контрагента. **2 балла** за идею ценовой дискриминации.