

8—9 класс

# Второй этап

## Второй день

Дата написания	7 марта 2015 г.
Количество заданий	5
Сумма баллов	100
Время написания	3 часа

Решения

**Задача 1. Гаджет и Микросхемов****(20 баллов)**

Господин Гаджет, которого вы встречали 21 февраля, всё еще является единственным продавцом гаджетов. Если он установит на свою продукцию цену  $p \leq 100$  рублей за штуку, то у него купят, как и раньше,  $100 - p$  единиц продукции (в ином случае не купят ничего).

За прошедшие две недели, однако, он узнал о существовании нового типа микросхем, производимых господином Микросхемовым, и решил использовать их в своем производстве. Между ними давняя история отношений: раньше Микросхемов работал на фирме господина Гаджета, но затем уволился, создал свою фирму и стал единственным производителем микросхем нового типа, которые подходят господину Гаджету (больше такие микросхемы никому не нужны). Обладая таким опытом, господин Микросхемов хорошо знает, что для производства каждого гаджета требуется всего две микросхемы нового типа, а также знает спрос на гаджеты. Сам господин Микросхемов тратит на производство единицы своей продукции 10 рублей.

Взаимодействие между ними устроено следующим образом. Сначала господин Микросхемов назначает цену на единицу своей продукции, после этого господин Гаджет решает, сколько микросхем закупить и по какой цене продавать гаджеты. Каждый из них при принятии решения учитывает его последствия и стремится заработать как можно большую прибыль (разницу между доходами и расходами). Чему будет равна максимальная прибыль каждого из предпринимателей?

**Решение**

Пусть Микросхемов установил цену за одну микросхему в размере  $q$ . Тогда господин Гаджет, назначив цену за один гаджет  $p \leq 100$ , сможет получить прибыль в размере

$$\pi_G(p, q) = p(100 - p) - 2(100 - p)q = -p^2 + p(100 + 2q) - 200q.$$

Графиком этой функции является парабола с рожками, направленными вниз. Вершина параболы находится в точке  $50 + q$ . Если  $q \leq 50$ , то  $q + 50 \leq 100$  и господин Гаджет получит прибыль в размере

$$\pi_G(50 + q, q) = (q - 50)^2.$$

Если  $q > 50$ , то максимальная прибыль Гаджета будет достигаться при цене  $p = 100$ , и она будет равна 0, он не продаст ни одного гаджета и не купит ни одной микросхемы. Если  $q < 50$ , то прибыль Микросхемова имеет вид

$$\pi_M(q + 50) = 2(100 - 50 - q)(q - 10) = 2(q - 10)(50 - q).$$

Графиком этой функции также является парабола с рожками вниз, ее вершина находится в точке  $q = 30$ . Тогда прибыль Микросхемова будет равна 800 рублей, а прибыль Гаджета — 400 рублей.

**Схема оценивания**

За правильно выписанную прибыль господина Гаджета, зависящую только от цены микросхем и либо цены гаджетов, либо количества гаджетов ставилось **3 балла**. За правильно найденную вершину этой параболы ставилось **5 баллов**. Если далее была правильно выписана прибыль господина Микросхемова, зависящая только от цены, которую он назначит, ставилось **8 баллов**. Далее **2 балла** ставилось, если (не перебором) находилась оптимальная цена для Микросхемова. Еще по **1 баллу** ставилось за правильно найденную прибыль Гаджета и Микросхемова.

**Задача 2. ЛДН****(20 баллов)**

ООО «ЛДН» производит три товара — Л, Д и Н. В производстве каждого из трех товаров используются два материала — А и В. Компания, поставляющая эти материалы, уведомила ООО «ЛДН», что в следующем месяце она не сможет поставить больше, чем по 2750 единиц каждого из материалов. Других поставщиков компания найти в течение месяца не сможет.

Информация о трех товарах приведена в таблице:

Товар	Л	Д	Н
Расход материала А на единицу товара, ед.	4	5	4
Расход материала В на единицу товара, ед.	5	3	7
Максимальный спрос, единиц в месяц	150	200	250
Прибыль от продажи единицы товара, руб./ед.	15	12	16

Определите, сколько каждого из товаров следует произвести фирме, чтобы ее прибыль была наибольшей.

**Решение**

Сначала проверим, хватит ли фирме материалов, чтобы удовлетворить максимальный спрос на каждый из трех товаров. Расход материала А в этой ситуации составит  $4 \cdot 150 + 5 \cdot 200 + 4 \cdot 250 = 2600 < 2750$  единиц, то есть этого материала в любом случае хватит. В дальнейшем можно не учитывать этот материал.

Расход материала В составит  $5 \cdot 150 + 3 \cdot 200 + 7 \cdot 250 = 3100 > 2750$ . Таким образом, этого материала не хватит, а значит, один или несколько товаров придется в продать в меньшем количестве.

Как определить, какие количества товаров следует произвести фирме? Наш редкий ресурс — материал В; нужно распределить его исходя из того, какова отдача на одну единицу этого ресурса.

Рассчитаем эту отдачу для трех товаров. Для товара Л она равна  $15/5 = 3$  рубля, для товара Д она равна  $12/3 = 4$  рубля, для товара Н она равна  $16/7$  рубля, что меньше 3.

Таким образом, в первую очередь нужно будет тратить материал В на товар Д, во вторую очередь на товар Л, и только в третью очередь на товар Н. При этом на товары Д и Л мы потратим в сумме  $150 \cdot 5 + 200 \cdot 3 = 1350$  единиц материала В, и на Н мы сможем потратить лишь  $2750 - 1350 = 1400$  единиц. Значит, максимальное количество товара Н, которое фирма сможет произвести, равно  $1400/7 = 200$  единиц.

Ответ: 200 единиц Д, 150 единиц Л и 200 единиц Н.

**Схема оценивания**

**6 баллов** за утверждение, что материала А хватает на удовлетворение всего спроса, а материала В — нет.

**10 баллов** за сравнение соотношения прибыли и количества затраченного товара В.

**4 баллов** за вычисление ответа.

## Задача 3. Магазины в Кукумбрии

(20 баллов)

Страна Кукумбрия имеет форму прямой дороги длиной 100 километров. В стране есть 101 житель, каждый из них живет в отдельном доме. Все дома расположены на одной стороне дороги, расстояние между любыми соседними домами равно 1 км (считайте, что сами дома не имеют ширины). Другая сторона дороги предназначена для магазинов, в которых продается единственный товар — огурцы. В зависимости от ситуации, количество магазинов может оказаться разным, единственное ограничение — два магазина не могут располагаться ближе, чем на расстоянии 1 км друг от друга. Например, если в стране будет 4 магазина на расстоянии 14, 32, 71 и 94 км от начала дороги, то ситуация будет выглядеть следующим образом:



Каждый житель Кукумбрии каждый день отправляется в ближайший к нему магазин и покупает там ровно один огурец по установленной государством цене 18 тугриков. Если ближайших к нему магазинов два (он живет посередине между ними), то он ходит в них поочередно, поэтому можно считать, что каждый из этих магазинов зарабатывает на нем в среднем 9 тугриков в день.

Фирма «Пупырышек» рассматривает возможность открыть в Кукумбрии магазин или сеть магазинов. Издержки на содержание одного магазина составят 100 тугриков в день независимо от того, сколько огурцов там будет продано, других издержек у фирмы нет (сами огурцы имеются у нее в неограниченном количестве бесплатно).

Фирма «Пупырышек» сама выбирает, сколько и где магазинов открыть, максимизируя суммарную прибыль всех своих магазинов. Опишите, как будет выглядеть сеть магазинов «Пупырышек» (сколько будет магазинов и где они будут располагаться) в каждом из следующих случаев.

- а) Других магазинов в стране нет, то есть до прихода «Пупырышка» ситуация выглядела так:



- б) В стране уже работает фирма «Зернышко», единственный магазин которой расположен в середине дороги:



- в) Шесть магазинов сети «Зернышко» расположены через 20 км друг от друга:



- г) Одиннадцать магазинов сети «Зернышко» расположены через 10 км друг от друга:



## Решение

В целом, фирме выгодно открывать магазин, если доход от него будет выше издержек на его содержание. Если количество покупателей в данном магазине равно  $N$ , то магазин выгоден при  $18N > 100$ . С учетом целочисленности покупателей, это эквивалентно  $N \geq 6$ , то есть магазин выгоден, если привлекает не меньше шести покупателей. При этом, если фирма решила открыть магазин, то ей нужно стремиться максимизировать количество покупателей, потому что издержки от него не зависят.

а) Где бы ни был расположен магазин, все покупатели придут в него.  $101 > 6$ , так что фирма откроет один магазин в любой точке. Открывать второй магазин невыгодно, поскольку он увеличивает издержки, не меняя доходов.

б) В этом случае страна как бы разбивается на два зеркально симметричных отрезка длиной 50 км. Рассмотрим левый отрезок  $[0; 50]$ . На нем, если считать концы, живет 51 покупатель. Тот из них, который живет в точке 50 (на правом конце отрезка, в середине страны), всегда будет ходить в магазин «Зернышко», поскольку он для него точно будет ближайшим. Покажем, как фирме «Пупырышек» заполучить 50 остальных покупателей. Покупатель, живущий в координате 49, придет к ней, если она будет стоять к нему ближе, чем магазин «Зернышко», то есть на интервале  $(48; 50)$ . Поскольку ближе, чем на километр от конкурента, вставить нельзя, множество точек, позволяющих получить этого покупателя, составляет  $(48; 49]$ . Вставая в любую из этих точек, магазин получает максимальную прибыль от продаж жителям отрезка  $[0; 50]$ .

Рассуждая аналогично, можно показать, что в правой части страны единственный нужно разместить на отрезке  $[51; 52]$ . Таким образом, у фирмы будет 2 магазина, в каждый из которых придет 50 покупателей (они обозначены точками):



в) В этом случае страна разбивается на 5 отрезков, каждый длиной 20 км. Рассмотрим первый из них. Поставив один магазин в середине, фирма может привлечь 10 покупателей (8 будут ходить только в этот магазин и еще двое — чередовать),  $11 > 6$ , так что выгодно открыть по крайней мере один магазин. При этом если магазин открыт в координате  $x$ , то в «зону влияния» фирмы Пупырышек попадает отрезок  $[x/2; (20 + x)/2]$ . Длина этого отрезка в любом случае равна 10, и выручка с него в любом случае будет равна 180 (при этом иногда это будут 10 целых покупателей, а иногда 9 целых и два «половинчатых»), а прибыль  $180 - 100 = 80$ .

Может ли фирма получить бóльшую прибыль с отрезка, если разместит там больше одного магазина? Как и в предыдущем пункте, в этом случае нужно размещать магазины близко к конкурентам, чтобы заполучить максимальное количество покупателей (точнее, первый магазин должен располагаться в точке из интервала  $[1; 2)$ , а второй — в точке из интервала  $(18; 19]$ ). Так можно стимулировать прийти всех покупателей, кроме тех, которые живут непосредственно рядом с магазинами конкурентов. Таким образом, в два магазина придут 19 покупателей, общая прибыль на отрезке составит  $19 \times 18 - 2 \times 100 = 142$ . Это больше, чем 80, которые можно было получить с одного магазина. Любые дополнительные магазины не увеличат прибыль фирмы, так как больше 19 покупателей с каждого отрезка всё равно получить нельзя.

То же самое нужно проделать на остальных отрезках, общая ситуация будет выглядеть следующим образом:



г) Если фирма поместит на каком-то из 10 отрезков, на которые разбивается страна, один магазин, то он привлечет только 5 покупателей, но  $5 < 6$ , так что открывать один магазин невыгодно. Вместе с тем, больше 9 покупателей на каждом отрезке также нельзя привлечь (покупатели, живущие в координатах, кратных 10, привязаны к «Зернышкам»), так что открытие двух или большего числа магазинов тоже не может быть выгодным. Получаем, что в этих условиях фирма «Пупырышек» не откроет ни одного магазина.

### Схема оценивания

а) За первый пункт задачи можно было получить **3 балла**. Если писалось, что магазин должен стоять в какой-то конкретной точке, то за это ставился **1 балл** из трёх.

б) За второй пункт задачи можно было получить **4 балла**. Из этих баллов **3** давалось за то, что магазины должны находиться в точках 49 и 51 и **1 балл** за объяснение. Если говорилось, что два магазина поставить нужно, но место указывалось неверно, то ставился **1 балл** из четырёх.

в) За третий пункт можно было получить **8 баллов**. **3** из них ставилось за рассмотрение прибыли в случае 1 магазина на каждом из отрезков между магазинами конкурента. Еще **3** за рассмотрение случая открытия 2 магазинов. Наконец, еще **2 балла** ставилось, когда, сравнив оба варианта, участник правильно делал вывод относительно того, что нужно открыть именно два магазина.

г) За четвертый пункт можно было получить **5 баллов**. **4** из них ставилось, если участник правильно писал о том, что один магазин ставить на каждом из отрезков не имеет смысла. Еще балл ставился, если писалось, что не следует ставить большее число магазинов.

## Задача 4. Билеты на футбол

(20 баллов)

Президент футбольного клуба города N-ска обратил внимание, что доходы клуба от продажи билетов на матчи команды очень невелики. На заседании совета директоров клуба он произнес пламенную речь:

*«Позор! Я получил последние данные о доходах клуба. Они чрезвычайно низки. Особенно низки доходы от продажи билетов на стадион. Они даже упали по сравнению с доходами прошлого сезона, и это несмотря на то, что перед нынешним сезоном мы успешно продали права на трансляцию матчей нашей команды в N-ске кабельному оператору!.. Посмотрите, например, на команду из города M-ска! На ее матчи стабильно приходит в три, а то и в четыре раза больше зрителей, чем на наши матчи. А чем мы хуже? Значит, и на наши матчи может приходиться в 4 раза больше болельщиков! Давайте искать выход из этой ситуации. Купим несколько звезд. Иванов, какие игроки тебе нужны? Месси? Роналду? Что? Говоришь, лучше поднимем цены на билеты? Голова, Иванов! Фёдоров, со следующего матча поднимай цены на билеты на 20%! Запомните: пока не научимся получать высокий доход, мы обречены на поражения! Иванов, опять мысль пришла? Отменить абонементы на все матчи сезона со следующего чемпионата? Действительно, за те же матчи мы бы получили большую сумму, если бы продавали билеты по отдельности на каждый матч. Голова, Иванов, голова!..»*

Есть ли в произнесенной речи экономические ошибки? Если да, процитируйте все соответствующие утверждения и поясните, почему они не соответствуют экономической логике.

## Решение

1. *Они даже упали по сравнению с доходами прошлого сезона, и это несмотря на то, что перед нынешним сезоном мы успешно продали права на трансляцию матчей нашей команды в N-ске кабельному оператору!»*

Продажа прав на телетрансляцию футбольных матчей клуба в родном городе может иметь несколько разнонаправленных эффектов на спрос на билеты на стадион. С одной стороны, телетрансляции могут привлечь на стадион новых болельщиков, которые до этого не знали о том, что в N-ске существует футбольная команда. С другой стороны, те, кто раньше ходил на стадион, теперь могут предпочесть смотреть футбол в более комфортных условиях дома. Неочевидно, какой из этих эффектов сильнее, поэтому однозначно утверждать, что в новом сезоне посещаемость домашних матчей команды должна была возрасти, нельзя.

2. *«Посмотрите, например, на команду из города M! На ее матчи стабильно приходит в три, а то и в четыре раза больше зрителей, чем на наши матчи. А чем мы хуже? Значит, и на наши матчи может приходиться в 4 раза больше болельщиков!»*

Некорректно сравнивать посещаемость матчей разных команд, да еще и из разных городов. Во-первых, города N и M могут быть несопоставимы по количеству жителей. Во-вторых, даже в одном городе разные команды могут изначально иметь совершенно разный уровень поддержки. В-третьих, у команд могут быть разные по вместимости стадионы.

3. *«Давайте искать выход из этой ситуации. Купим несколько звезд. Иванов, какие игроки тебе нужны? Месси? Роналду?»*

Несмотря на то, что покупка футбольных звезд действительно может привлечь на стадион больше болельщиков, изменение прибыли клуба в результате совершения такой опера-

ции, скорее всего, будет отрицательным — стоимость футбольных суперзвезд несопоставимо выше потенциальных дополнительных доходов от продажи билетов.

4. *«Говоришь, лучше поднимем цены на билеты? Голова, Иванов! Фёдоров, со следующего матча поднимай цены на билеты на 20 %!»*

Такая мера может, наоборот, привести к сокращению прибыли. Увеличение цены на билеты приведет к снижению числа болельщиков на стадионе. Необходимо было сначала провести исследование, компенсирует ли дополнительный доход от увеличения цены на билеты для тех, кто продолжит ходить на стадион, потери, связанные с отказом покупать билеты по более высокой цене частью болельщиков.

5. *«Запомните: пока не научимся получать высокий доход, мы обречены на поражения!»*

Максимизация дохода и максимизация вероятности победы в турнире — это разные задачи. Бывают команды, которые обладают не очень большим бюджетом, но при этом показывают гораздо более хорошие спортивные результаты, чем команды с большим бюджетом.

6. *«Отменить абонементы на все матчи сезона со следующего чемпионата? Действительно, за те же матчи мы бы получили большую сумму, если бы продавали билеты по отдельности на каждый матч».*

Проблема в том, что болельщик не обязан покупать билет на каждый матч. Он может заболеть, уехать в отпуск, да и просто разочароваться в любимой команде. А покупая абонемент, он сразу платит за все матчи сезона (пусть и меньшую сумму). Поэтому отмена абонементов может привести к сокращению доходов клуба. Кроме того, поскольку готовность платить за каждый следующий матч отдельно взятого болельщика может быть меньше, чем за предыдущий, продавая все билеты сразу (в виде абонемента), можно установить более высокую среднюю цену посещения матча.

#### Схема оценивания

За каждую верно указанную и объясненную ошибку ставилось до 5 баллов, но не более 20 баллов за задачу. Таким образом, для максимального балла было достаточно указать 4 ошибки.

**Задача 5. Рассрочка****(20 баллов)**

*Рассрочка* — это способ продажи товара, при котором сумма, уплачиваемая покупателем, распределяется во времени. В отличие от обычного кредита, при рассрочке не должно быть никаких дополнительных переплат: процентов, комиссий и т. п. — общая сумма, уплаченная покупателем в итоге, должна быть равна цене товара. Как правило, стоимость товара вносится через небольшие промежутки времени (например, раз в месяц) равными частями. В случае покупки товара в рассрочку между покупателем и продавцом нет посредника в виде банка, то есть продавец получает деньги не сразу (как было бы в случае банковского кредита), а в том же режиме, в каком потребитель их платит.

**а)** Аристарх Ксенофонович пришел в магазин за пылесосом и увидел, что продавец предлагает всем желающим рассрочку платежа. Он отказался от предложения, высказав следующий аргумент: *«Если бы у меня не было необходимой суммы, то это было бы выгодным предложением. Но поскольку сумма, равная цене пылесоса, уже заготовлена и лежит у меня в кошельке, никакой выгоды от рассрочки для меня нет»*. Прав ли Аристарх Ксенофонович? Приведите рассуждения и/или расчеты, подтверждающие или опровергающие его слова.

**б)** Аполлинарий Ермолаевич, менеджер торговой сети по продаже бытовой техники, утверждает: *«Нам нет никакого смысла продавать наш товар в рассрочку, потому что получить оплату сразу всегда выгоднее, чем через какое-то время»*. Прав ли Аполлинарий Ермолаевич? Приведите рассуждения и/или расчеты, подтверждающие или опровергающие его слова.

**в)** Несмотря на мнение Аполлинария Ермолаевича, некоторые магазины всё же продают товар в рассрочку. Как вы думаете, с какими еще проблемами (помимо позднего получения денег) они могут столкнуться при этом?

**Решение**

**а)** Если Аристарх Ксенофонович не заплатит всю сумму сразу, а согласится на рассрочку, то он может положить в банк остаток денег и снимать их по мере того, как будут подходить сроки очередных платежей. Проценты, которые банк будет выплачивать по депозиту, станут чистым выигрышем Аристарха Ксенофоновича.

**б)** Поскольку продажа товаров в рассрочку выгодна покупателям (см. пункт **а**)), появление такой услуги может увеличить спрос на продукцию торговой сети, создав конкурентное преимущество (некоторые из тех, кто не могут или не хотят покупать товар сразу, могут купить его в рассрочку). Таким образом, потери, связанные с отсрочкой платежей, могут быть компенсированы возросшим спросом.

- в)**
- В отличие от продажи товара с оплатой сразу (а также от продажи товара в кредит с посредником в виде банка), в случае рассрочки магазин не получает деньги сразу, при этом сразу передает товар. Магазин, таким образом, сталкивается с риском, что покупатель не сможет совершить очередной платеж (например, он внезапно потеряет работу). Магазин сможет потребовать товар обратно, но не факт, что товар, которым потребитель пользовался несколько месяцев, будет в идеальном состоянии и иметь товарный вид. Все эти риски придется закладывать в цену, что может при прочих равных условиях снизить конкурентное преимущество, создаваемое рассрочкой.
  - Даже если снижение величины спроса, вызванное повышением цены из-за рисков, будет несущественным, может быть еще одна проблема. Магазин, в отличие от банка, не является организацией, специализирующейся на оценке кредитных рисков, поэтому его расчеты (на

сколько повысить цену, кому одобрять рассрочку и т. п.) могут содержать систематические ошибки, и он может понести убытки.

#### Схема оценивания

- а) **7 баллов** за правильный ответ.
- б) **5 баллов** за правильный ответ
- в) **5 баллов** за идею о существовании риска неуплаты и необходимости включать его в цену. Еще **3 балла** ставятся за любую другую уместную проблему, с которой может столкнуться магазин: некачественная оценка рисков, транзакционные издержки и т. п.