



9 класс

4 марта 2023 года

Время написания – 235 минут

Количество задач – 4

Сумма баллов – 150

Заключительный этап

Московской олимпиады школьников – 2023

по экономике

Все задачи требуют записи подробного решения. Все действия в решении должны быть обоснованы. Все утверждения, содержащиеся в решении, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений.

Все неизвестные факты, не следующие явно из условия, должны быть доказаны. Не пропускайте ходы в решении: жюри может ставить баллы за любые корректно выполненные действия, даже если вам они кажутся малозначительными. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное. Рекомендуем все вычисления производить, не используя черновик.

Старайтесь излагать свои мысли чётко, писать разборчиво. Зачёркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачёркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе. Всякий раз чётко обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. Перед началом решения пункта (1) можно выписать общую часть, подходящую для всех пунктов, и дальше ссылаться на неё. **Бланки ответов односторонние.** Обрат не проверяется.

Если не сказано иного, считайте все единицы товаров, ресурсов и активов во всех задачах бесконечно делимыми (нецелыми).

Удачи!

Задача 1. Веганы и мясоеды

На далёкой-далёкой планете Ух проживают два вида жителей: 60 одинаковых мясоедов и N одинаковых веганов. Суммарный спрос мясоедов на мясо составляет $Q = 120 - P$, где Q – количество выращенных и съеденных всеми мясоедами коров, а P – цена одной коровы в д.е. (далёких единицах). Предложение мяса описывается функцией $Q = P$.

К сожалению, выращивание коров приводит к загрязнению окружающей среды, в результате которого страдает каждый житель планеты Ух. Ущерб от загрязнения для каждого отдельного жителя одинаков и его можно оценить в $0,2*Q$ (чем больше выращено коров, тем больше ущерб).

1. Найдите величину общественного благосостояния на планете Ух при отсутствии вмешательства в функционирование рынка.

Очевидно, что и выращиванием коров, и их поеданием занимаются только мясоеды. Группа веганов, не испытывающая от выращивания и поедания коров ничего, кроме страданий, предлагает запретить выращивание коров на планете Ух.

2. При каком значении N эта мера будет принята, если решение о запрете выращивания коров будет приниматься простым большинством голосов (при равенстве голосов запрет не принимается), а во время голосования жителей планеты каждый житель будет голосовать так, чтобы максимизировать своё личное благосостояние?
3. Назовём голосование эффективным, если в результате голосования общественное благосостояние не снижается. При каких значениях N голосование будет эффективным?
4. Если вы правильно ответили на предыдущие вопросы, то понимаете, почему старейшины планеты Ух решили предложить другой способ увеличить общественное благосостояние – ввести налог на выращивание коров в размере t д.е. за каждую корову. Найдите оптимальную с точки зрения максимизации общественного благосостояния величину t для каждого значения N .

Задача 2. Ипотечный блиц

Существуют различные схемы платежей по ипотечному кредиту. Самый распространённый из них – аннуитет. При такой схеме платеж каждый месяц вычитается из суммы долга после начисления процентов. Например, если изначальная сумма долга равна S_0 , платеж равен X , а ставка процента равна $(100i)\%$, то долг на конец первого месяца будет равен $S_1 = (1 + i)S_0 - X$, долг на конец второго будет равен $S_2 = (1 + i)S_1 - X$, и т.д. Платеж X подбирается так, чтобы в конце срока кредита долг заёмщика перед банком был равен нулю.

Для справки:

$$\text{верно тождество } b + bq + bq^2 + \dots + bq^n = \frac{b*(q^n-1)}{q-1}.$$

Верны ли утверждения, приведённые ниже? Ответы следует обосновать алгебраически.

1. Удвоение суммы кредита увеличит размер платежа вдвое при тех же величинах ставки по кредиту и срока кредита.
2. Удвоение срока кредита уменьшит размер платежа больше, чем вдвое, при тех же величинах ставки по кредиту и суммы кредита.
3. Удвоение ставки процента по кредиту увеличит размер платежа больше, чем вдвое, при тех же величинах срока по кредиту и суммы кредита.

На следующей странице есть задача 3.

Задача 3. Такси, такси

Часто взаимодействие на реальных рынках устроено не так, как в школьных задачах, и состоит из нескольких этапов при участии посредников. Попробуем рассмотреть одно из таких взаимодействий на примере рынка такси.

В некоторой стране рынок такси монополизирован одним большим агрегатором под названием «AYgo». Агрегатор не осуществляет перевозки, а продаёт право работать при помощи своего приложения, причём таксист должен выплатить «AYgo» r денежных единиц (д.е.) за каждую поездку, осуществлённую через приложение агрегатора. Издержки «AYgo» на обслуживание приложения составляют $C_A = 2$ д.е. в расчёте на одну поездку.

На рынке работают 100 таксистов, издержки каждого из них на одну поездку составляют $C_T = 6$ д.е. Спрос на услуги каждого таксиста, подключённого к агрегатору, имеет вид $q_i^d = 28 - P$, где q_i^d – количество поездок, которое покупатели готовы приобрести у данного таксиста, может являться нецелым числом, а P – цена в д.е. за одну поездку. Спрос на услуги таксиста, не подключённого к агрегатору, отсутствует.

Взаимодействие выглядит следующим образом:

- сначала «AYgo» назначает размер r ;
- после этого таксисты назначают цену P , максимизируя прибыль с учётом спроса на их услуги.

1. Найдите, какую цену назначат таксисты на конечную услугу, а также прибыль агрегатора «AYgo».

Предположим, что у таксистов появилась возможность снизить издержки на каждую поездку до $C_T = 4$ д.е., но это потребует от каждого из них дополнительных издержек в размере $A = 12$. Будем считать, что «AYgo» узнаёт о возможности таксистов инвестировать в сокращение издержек до того, как назначить r , а таксисты инвестируют в том случае, если их прибыль в результате этого не уменьшится.

2. Найдите цену, которую назначат таксисты за каждую поездку, значение r , а также прибыль агрегатора «AYgo» в этом случае.

Инвестиции в снижение издержек стали недоступны таксистам, а «AYgo» решил изменить ценовую политику и теперь сам выбирает цену за одну поездку. Теперь агрегатор назначает не только размер r , но и устанавливает цену одной поездки P . После этого каждый таксист либо соглашается на условия «AYgo» (если его прибыль не меньше нуля) и совершает количество поездок в соответствии со спросом на свои услуги, либо отказывается работать с агрегатором.

3. Найдите цену, которую назначит «AYgo» за каждую поездку, значение r , а также прибыль «AYgo» в этом случае. Объясните, почему (по сравнению с пунктом 1) цена поездки увеличилась (уменьшилась) в связи с появившейся возможностью агрегатора назначать цену за поездку.

На следующей странице есть задача 4

Задача 4. Из обезьяны

В некоторой олимпиаде участвуют 200 школьников, каждый из которых принадлежит одному из двух типов: к старательным школьникам (А) или к ленивым школьникам (В). Каждый из школьников получает полезность от того, сколько и каких школьников участвуют в олимпиаде.

Каждый старательный школьник (А) получает 2 единицы полезности за каждого участвующего в олимпиаде старательного школьника (А) кроме себя, так как это мотивирует его ещё больше учиться, и ценность победы для него возрастает, и 1 единицу полезности за каждого ленивого школьника (В), ведь каждый школьник, который не ленится, увеличивает его шансы на победу в олимпиаде.

Каждый ленивый школьник (В) получает 2 единицы полезности за каждого ленивого школьника (В) кроме себя, так как каждый ленивый школьник увеличивает его шансы на победу, и теряет 1 единицу полезности за каждого старательного школьника (А), ведь старательный школьник уменьшает его шансы на победу в олимпиаде и заставляет ленивого школьника жалеть о том, что он не старается. Так как без стараний у школьника остаётся больше сил, каждый ленивый школьник дополнительно получает 101 единицу полезности.

После того как олимпиада прошла каждый из школьников размышляет над тем, не поменять ли ему стратегию. То есть старательный школьник (А) думает, не стать ли ему ленивым школьником (В) и наоборот. Для этого каждый из них сравнивает свою текущую полезность с полезностью в случае, если бы на этой олимпиаде он был бы другим типом школьника. Если старательный школьник становится ленивым, то его дополнительная полезность будет равна 81 вместо 101, так как он не будет знать, чем занять своё освободившееся время. Каждый школьник решает поменять свою стратегию только в том случае, если его полезность от смены стратегии при неизменных стратегиях других школьников будет строго больше.

Назовём состав участников олимпиады *равновесным*, если после олимпиады ни один из школьников не хотел бы поменять свой тип.

1. Пусть в олимпиаде участвуют X старательных школьников. Найдите все возможные значения X , при которых состав участников олимпиады будет равновесным.
2. Предположим, что организаторы олимпиады решили разбить всех участников на две лиги. В одной они оставили 120 человек, а в другой – 80 человек. Организаторы сами могут решать, сколько в какой лиге будет старательных школьников. Найдите такое минимальное суммарное количество старательных школьников, чтобы организаторы олимпиады могли распределить их по двум лигам так, чтобы после олимпиады все ленивые школьники решили стать старательными и все старательные решили остаться старательными. Полезность школьников будут считать не от всех школьников, а лишь от тех, которые участвуют с ними в одной лиге.
3. В условиях предыдущего пункта предположим, что число старательных школьников составляет 90 человек. Организаторы максимизируют число школьников, решивших после олимпиады быть старательными. Найдите максимальное суммарное число школьников, состоящее из числа школьников, которые после олимпиады примут решение стать старательными, и тех, кто решит остаться старательными.
4. В условиях предыдущих пунктов, то есть если изначально всего 90 старательных школьников из 200, одна олимпиада делится на две лиги по 120 и 80 человек. Найдите минимальное количество лет, которое должно пройти, чтобы все школьники решили стать старательными. Считайте, что каждый из 200 школьников участвует в олимпиаде каждый год, к ним не добавляется новых школьников, а в год проводится одна олимпиада, разбитая на 2 лиги.