

### Задача 1 «Волшебная субсидия из глубины новоборисийских руд»

**A) (10 баллов) Найдите зависимости цены продажи и величины производства фирмы от  $b$ .**

За отсутствие проверки достаточных условий баллы не снимаются во всей задаче.

*С субсидией и продаёт обеим группам:*

$$Pr = P*(450-9*P + 400-16*P + 16*b) - 12*(450-9*P + 400-16*P + 16*b) (+1 за прибыль)$$

$$Pr = (P-12)*25*(34 - P + 16*b/25) \rightarrow \max \text{ по } P$$

$$\text{Вершина параболы при } P = 23 + 8*b/25 (+0,5 \text{ за вывод данной зависимости})$$

$$Q = 850 - 25*P + 16*b = 275 + 8*b (+0,5 \text{ за вывод данной зависимости})$$

$$Pr(1+2) = 25*(11 + 8*b/25)^2$$

*Продаёт только первой группе*

$$Pr = P*(450-9*P) - 12*(450-9*P) (+1 за прибыль)$$

$$Pr = (P-12)*9*(50-P) \rightarrow \max \text{ по } P$$

$$P = 31 (+0,5 \text{ за результат}) \quad Q = 450-9*P = 171 (+0,5 \text{ за результат})$$

$$Pr(1) = 57^2$$

*Продаёт только второй группе*

$$Pr = P*(400-16*P + 16*b) - 12*(400-16*P + 16*b) (+1 за прибыль)$$

$$Pr = (P-12)*16*(25 - P + b) \rightarrow \max \text{ по } P$$

$$\text{Вершина параболы при } P = 18,5 + b/2 (+0,5 \text{ за вывод данной зависимости})$$

$$Q = 400-16*P + 16*b = 104 + 8*b (+0,5 \text{ за вывод данной зависимости})$$

$$Pr(2) = 16*(6,5 + b/2)^2$$

*Сравним прибыли (+1 балл)*

$$Pr(1) > Pr(1+2) \Rightarrow 57^2 > 25*(11 + 8*b/25)^2 \Rightarrow b < 5/4$$

$$Pr(1+2) > Pr(2) \Rightarrow 25*(11 + 8*b/25)^2 > 16*(6,5 + b/2)^2 \Rightarrow b < 72,5$$

	<b><math>b &lt; 5/4</math> (только 1-я)</b>	<b><math>5/4 &lt; b &lt; 72,5</math> (обе)</b>	<b><math>b &gt; 72,5</math> (только 2-я)</b>
P	31	$23 + 8*b/25$	$18,5 + b/2$
Q	171	$275 + 8*b$	$104 + 8*b$

+1 балл за определение того, какой группе и при каком  $b$  будет продавать фирма (в сумме +3 балла за три интервала)

Комментарий. Границы интервалов могут произвольно присваиваться в ответах, за это баллы не снимаются и не добавляются.

**Б) (10 баллов)** Государство решило сократить расходы на субсидирование, однако обеспокоено тем, что это ухудшит благосостояние бедной группы потребителей. Экономисты предложили неожиданное решение. Продавать монополии ежепериодно информацию о том, к какой группе относится каждый потребитель и не субсидировать вовсе. Определите максимальную сумму, которую готова платить фирма за такую информацию.

Если фирма отказывается покупать информацию и не получает субсидию вовсе, то она продаёт только первой группе и  $Pr(1) = 57^2$  (+1 балл)

Если фирма покупает и не получает субсидию вовсе, то прибыль имеет вид.

$$Pr = (P_1 - 12) * (450 - 9 * P_1) + (P_2 - 12) * (400 - 16 * P_2) \rightarrow \max \text{ по } P_1 \text{ и } P_2 \quad (+2 \text{ балла})$$

$$Pr = (P_1 - 12) * 9 * (50 - P_1) + (P_2 - 12) * 16 * (25 - P_2)$$

Вершина параболы в  $P_1 = 31$  (+1 балл) и  $P_2 = 18,5$  (+1 балл)

Прибыль от первой группы не меняется (цена и количество те же)

$Pr(1) < Pr$  (при дискриминации по ценам)

$$57^2 < 57^2 + 16 * (6,5)^2 - \text{платёж} \quad (+1 \text{ балл})$$

$$\text{Платёж} < 676$$

**Ответ: 676 (+1 балл)**

Комментарий. Если в ответе будет приведено число от 675 до 676, то баллы за это не снимаются

**Какой величиной расходов государство обеспечило бы тот же размер потребления гетманина без предоставления информации о принадлежности каждого потребителя к группе?**

$$Q_2 = 400 - 16 * P_2 = 400 - 16 * 18,5 = 104 \quad (+1 \text{ балл}) \rightarrow Q_2 = 275 + 8 * b = 104 \rightarrow b = 171/8 \quad (+1 \text{ балл})$$

$$S = b * Q_2 = 104 * 171/8 = 2223 \quad (+1 \text{ балл})$$

**В) (5 баллов)** Объясните, почему механизм из п Б) с меньшими бюджетными расходами позволяет увеличить благосостояние бедной группы потребителей.

Потому что при отсутствии дискриминации более бедная группа не покупала бы вовсе (+2 балла), а при её наличии фирма может продавать более бедной группе, не снижая цены для первой группы (+3 балла)

**Г) (5 баллов)** Всмотритесь в характер воздействия субсидии на цену продажи при всех размерах. Какой парадоксальный результат можно увидеть в данных? Объясните, откуда он возникает.

Парадокс в том, что при предоставлении субсидии, начиная с  $5/4$ , цена продажи падала, т.е. при росте спроса (за счёт более бедной группы) падает цена! (+3 балла). Связано это со входом группы потребителей, что делает общий спрос более чувствительным к цене (+2 балла).

## Задача 2 «Финансы и романсы»

А) (10 баллов) Найдите платеж в конце каждого периода как функцию от ставки и суммы кредита по первому графику платежей.

При **любом** графике платежей верно следующее ( $K$  – сумма кредита,  $i$  – ставка процента по кредиту,  $X_j$  – платёж в конце года):

$$K = \frac{X_1}{1+i} + \frac{X_2}{(1+i)^2} + \frac{X_3}{(1+i)^3} \quad (+3 \text{ балла за это выражение или эквивалент})$$

$$X_1 * (1+i) = X_2 \quad X_2 * (1+i) = X_3 \quad (+4 \text{ балла за связь платежей друг с другом})$$

$$K = \frac{X_1}{1+i} + \frac{X_1 * (1+i)}{(1+i)^2} + \frac{X_2 * (1+i)^2}{(1+i)^3} = \frac{X_1}{1+i} + \frac{X_1 * (1+i)}{(1+i)^2} + \frac{X_2 * (1+i)^2}{(1+i)^3} = \frac{X_1}{1+i} * 3$$

$$X_1 = \frac{K * (1+i)}{3} \quad (+1 \text{ балл}) \quad X_2 = \frac{K * (1+i)^2}{3} \quad (+1 \text{ балл}) \quad X_3 = \frac{K * (1+i)^3}{3} \quad (+1 \text{ балл})$$

**Примечание.** Если вместо трёх в ответе приведено число периодов (лет), то ставится полный балл.

Б) (20 баллов) Найдите платеж в конце каждого периода как функцию от ставки и суммы кредита по второму графику платежей.

$Y_j$  – платёж в конце года по второй схеме

$$K = \frac{Y_1}{1+i} + \frac{Y_2}{(1+i)^2} + \frac{Y_3}{(1+i)^3} \quad (+2 \text{ балла за это выражение или эквивалент})$$

$$\frac{Y_1 - i * K}{Y_1} * (1+i) = \frac{Y_2 - i * ((1+i) * K - Y_1)}{Y_2} \quad (+4 \text{ балла за связь платежей в первый и во второй годы})$$

$$\frac{Y_2 - i * ((1+i) * K - Y_1)}{Y_2} * (1+i) = \frac{Y_3 - i * ((1+i)^2 * K - (1+i) * Y_1 - Y_2)}{Y_3}$$

**(+4 балла за связь платежей в третьей и во второй годы)**

$$\text{Решим сначала } \frac{Y_1 - i * K}{Y_1} * (1+i) = \frac{Y_2 - i * ((1+i) * K - Y_1)}{Y_2}$$

$$(1+i) - \frac{i * K}{Y_1} * (1+i) = 1 - \frac{i * ((1+i) * K - Y_1)}{Y_2}$$

$$i - \frac{i * K}{Y_1} * (1+i) = - \frac{i * ((1+i) * K - Y_1)}{Y_2}$$

$$1 - \frac{K}{Y_1} * (1+i) = - \frac{((1+i) * K - Y_1)}{Y_2}$$

$$1 - \frac{K}{Y_1} * (1+i) = - \frac{((1+i) * K - Y_1)}{Y_2}$$

$$Y_1 * Y_2 - K * (1+i) * Y_2 = -K * (1+i) * Y_1 + Y_1 * Y_1$$

$$Y_1 * Y_2 - Y_1 * Y_1 - K * (1+i) * Y_2 + K * (1+i) * Y_1 = 0$$

$$Y_1 * (Y_2 - Y_1) - K * (1+i) * (Y_2 - Y_1) = 0$$

$$(Y_2 - Y_1) * (Y_1 - K * (1+i)) = 0$$

$Y_1 < K * (1+i)$ , поскольку иначе кредит гасится за первый период, значит,  $Y_2 = Y_1$

**(+4 балла за вывод)**

$$\text{Теперь } \frac{Y_2 - i * ((1+i) * K - Y_1)}{Y_2} * (1+i) = \frac{Y_3 - i * ((1+i)^2 * K - (1+i) * Y_1 - Y_2)}{Y_3}$$

$$\text{Раз } Y_1 = Y_2, \text{ то } \frac{Y_2 - i * ((1+i) * K - Y_2)}{Y_2} * (1+i) = \frac{Y_3 - i * ((1+i)^2 * K - (1+i) * Y_2 - Y_2)}{Y_3}$$

$$(1+i)^2 - \frac{i * (1+i)^2 * K}{Y_2} = 1 - \frac{i * (1+i)^2 * K - i * (1+i) * Y_2 - i * Y_2}{Y_3}$$

$$(1+i)^2 - 1 - \frac{i * (1+i)^2 * K}{Y_2} = - \frac{i * (1+i)^2 * K - i * (1+i) * Y_2 - i * Y_2}{Y_3}$$

$$2 * i + i^2 - \frac{i * (1 + i)^2 * K}{Y2} = - \frac{i * (1 + i)^2 * K - i * (1 + i) * Y2 - i * Y2}{Y3}$$

$$2 + i - \frac{(1 + i)^2 * K}{Y2} = - \frac{(1 + i)^2 * K - (1 + i) * Y2 - Y2}{Y3}$$

$$(2 + i) * Y2 * Y3 - (1 + i)^2 * K * Y3 = -(1 + i)^2 * K * Y2 + (2 + i) * Y2 * Y2$$

$$(2 + i) * Y2 * (Y3 - Y2) - (1 + i)^2 * K * (Y3 - Y2) = 0$$

$$(Y3 - Y2) * ((2 + i) * Y2 - (1 + i)^2 * K) = 0$$

$(2 + i) * Y2 < (1 + i)^2 * K$ , поскольку иначе кредит гасится за два периода, значит,  
 $Y2 = Y1$  (+4 балла за вывод)

$$K = \frac{Y1}{1+i} + \frac{Y2}{(1+i)^2} + \frac{Y3}{(1+i)^3} = \frac{Y1}{1+i} + \frac{Y1}{(1+i)^2} + \frac{Y1}{(1+i)^3}$$

$$Y1 = Y2 = Y3 = \frac{K * i * (1+i)^3}{((1+i)^3 - 1)} = \frac{K * i}{1 - (1+i)^{-3}}$$

(+2 балла за любое из двух выражений или эквивалент)

**Примечание.** Приведённое выше доказательство верно, если срок кредита от 3 лет и более, поэтому для получения полного балла было достаточно получить, что платежи в первые 3 периода равны. Если в финальном выражении вместо 3 будет приведен срок кредита как параметр, то ставится полный балл.

*В) (10 баллов) Пусть у Макара нет собственных средств на первоначальные вложения в проект, но проект будет генерировать достаточно денежных средств на все остальные расходы в другие периоды при обоих графиках платежей. Какой график платежей будет выгоднее при ставке дисконтирования 20% годовых и ставке по кредиту 44% годовых? Обе схемы кредита дают положительную чистую приведенную стоимость при реализации проекта.*

$$NPV \text{ (при первой схеме)} = B + K - \left( \frac{X1}{1,2} + \frac{X2}{(1,2)^2} + \frac{X3}{(1,2)^3} \right)$$

$$NPV \text{ (при второй схеме)} = B + K - \left( \frac{Y}{1,2} + \frac{Y}{(1,2)^2} + \frac{Y}{(1,2)^3} \right)$$

$B$  – приведенные к текущему периоду чистые выгоды от реализации проекта без учёта суммы кредита и платежей по нему

Таким образом, следует выбрать такую схему кредита, при которой приведенная стоимость платежей по кредиту будет меньше (+3 балла за этот вывод или его эквивалент)

$$\frac{X1}{1,2} + \frac{X2}{(1,2)^2} + \frac{X3}{(1,2)^3} \text{ vs. } \frac{Y}{1,2} + \frac{Y}{(1,2)^2} + \frac{Y}{(1,2)^3}$$

$$\frac{K * (1+i)}{3 * 1,2} + \frac{K * (1+i)^2}{3 * (1,2)^2} + \frac{K * (1+i)^3}{3 * (1,2)^3} \text{ vs. } \frac{K * i * (1+i)^3}{((1+i)^3 - 1)} \left( \frac{1}{1,2} + \frac{1}{(1,2)^2} + \frac{1}{(1,2)^3} \right)$$

$$\frac{1,44}{3 * 1,2} + \frac{(1,44)^2}{3 * (1,2)^2} + \frac{(1,44)^3}{3 * (1,2)^3} \text{ vs. } \frac{0,44 * (1,44)^3}{((1,44)^3 - 1)} \left( \frac{1}{1,2} + \frac{1}{(1,2)^2} + \frac{1}{(1,2)^3} \right)$$

(+3 балла за правильные подстановки)

$$1,2 + (1,2)^2 + (1,2)^3 \text{ vs. } \frac{3 * (1,44)^3}{(1,44)^2 + 1,44 + 1} \left( \frac{1}{1,2} + \frac{1}{(1,2)^2} + \frac{1}{(1,2)^3} \right)$$

$$(1,2 + (1,2)^2 + (1,2)^3) * (1 + (1,2)^2 + (1,2)^4) \text{ vs. } 3 * ((1,2)^6 + (1,2)^4 + (1,2)^3)$$

$$(1,2)^7 + (1,2)^6 + 2 * (1,2)^5 + (1,2)^4 + 2 * (1,2)^3 + (1,2)^2 + 1,2 \text{ vs. } 3 * ((1,2)^6 + (1,2)^4 + (1,2)^3)$$

$$(1,2)^7 + (1,2)^6 - (1,2)^5 - 2 * (1,2)^4 - (1,2)^3 + (1,2)^2 + 1,2 \text{ vs. } 0$$

$$(1,2)^5 * ((1,2)^2 - 1) + (1,2)^4 * ((1,2)^2 - 1) - (1,2)^2 * ((1,2)^2 - 1) - 1,2 * (1,2)^2 - 1 \text{ vs. } 0$$

$$(1,2)^5 + (1,2)^4 - (1,2)^2 - 1,2 > 0$$

Первая схема менее выгодна (+4 балла за вывод)

### Задача 3 «Переносы»

А) Изначально функция прибыли:  $PR=(120-q)*q-0,5*q^2$ ; Это – парабола ветвями вниз (как и все последующие функции прибыли), следовательно, максимум – в вершине:

$$q^*=40; P^*=80; PR^*=2400$$

Задачу можно было также и решить через приравнивание предельных величин.  $MR=120-2q$ ;  $MC=q$   
 $\Rightarrow 120-2q=q \Rightarrow q^*=40$

**4 балла ставилось за формулировку задачи фирмы (приравнивание предельных или выписывание прибыли с задачей максимизации).**

**2 балла за правильный ответ**

Б) Далее возможны три интерпретации условия. Все три интерпретации засчитывались:

**(1) Плата 600 существует в любом случае**

Рассмотрим все 9 вариантов «решение о пошлине – страна расположения сада»

I. Пошлина не введена

Если сад – в стране А,  $PR=(120-q)*q-q^2-600$ ;  $q^*=30$ ;  $P^*=90$ ;  $PR^*=1800-600=1200$ . Кстати, эта величина никак не зависит от пошлин, поскольку при расположении сада в стране А, импорт не происходит

Если сад – в стране В, оптимизация устроена аналогично пункту А, но с поправкой на издержки переноса сада,  $PR^*=2400-600=1800$

Если сад – в стране С, всё в точности совпадает с пунктом А,  $PR=2400$

II. Введена пошлина на импорт из страны С

Если сад – в стране А,  $PR=1200$

Если сад – в стране В,  $PR=1800$ , ведь на страну В пошлина по-прежнему не действует

Если сад – в стране С,  $PR=(120-q-24)*q-0,5*q^2$ ;  $q^*=32$ ;  $P^*=88$ ;  $PR=1536$

III. Введена пошлина на любой импорт

Если сад – в стране А,  $PR=1200$

Если сад – в стране В,  $PR=1536-600=936$ , т.к. оптимизация аналогична оптимизации для сада в стране С с пошлиной, с поправкой на издержки переноса сада

Если сад – в стране С,  $PR=(120-q-24)*q-0,5*q^2$ ;  $q^*=32$ ;  $P^*=88$ ;  $PR=1536$

Соберём все полученные результаты в табличку:

Оптимальная прибыль фирмы	Пошлины нет	Пошлина на импорт из С	Пошлина на любой импорт	Минимальная прибыль
Сад в стране А	1200	1200	1200	1200
Сад в стране В	1800	1800	936	936
Сад в стране С	2400	1536	1536	1536

Фирма выбирает вариант с максимальной минимальной прибылью, а это страна С и прибыль 1536.

**Ответ: сад будет расположен в стране С, объём равен 32 или 40**

**(2) Плату 600 надо платить только в том случае, если какая-либо пошлина была введена**

Рассмотрим все 9 вариантов «решение о пошлине – страна расположения сада»

I. Пошлина не введена

Если сад – в стране А,  $PR=(120-q)*q-q^2-600$ ;  $q^*=30$ ;  $P^*=90$ ;  $PR^*=1800$ . Кстати, эта величина никак не зависит от пошлин, поскольку при расположении сада в стране А, импорт не происходит

Если сад – в стране В, оптимизация устроена аналогично пункту А,  $PR^*=2400$

Если сад – в стране С, всё в точности совпадает с пунктом А,  $PR=2400$

II. Введена пошлина на импорт из страны С

Если сад – в стране А,  $PR=1200$

Если сад – в стране В,  $PR=1800$ , ведь на страну В пошлина по-прежнему не действует

Если сад – в стране С,  $PR=(120-q-24)*q-0,5*q^2$ ;  $q^*=32$ ;  $P^*=88$ ;  $PR=1536$

III. Введена пошлина на любой импорт

Если сад – в стране А,  $PR=1200$

Если сад – в стране В,  $PR=1536-600=936$ , т.к. оптимизация аналогична оптимизации для сада в стране С с пошлиной, с поправкой на издержки переноса сада

Если сад – в стране С,  $PR=(120-q-24)*q-0,5*q^2$ ;  $q^*=32$ ;  $P^*=88$ ;  $PR=1536$

Соберём все полученные результаты в табличку:

Оптимальная прибыль фирмы	Пошлины нет	Пошлина на импорт из С	Пошлина на любой импорт	Минимальная прибыль
Сад в стране А	1800	1200	1200	1200
Сад в стране В	2400	1800	936	936
Сад в стране С	2400	1536	1536	1536

Фирма выбирает вариант с максимальной минимальной прибылью, а это страна С и прибыль 1536.

**Ответ: сад будет расположен в стране С, объём равен 32 или 40**

**(3) Плата 600 не выплачивается никогда:** согласно условию, взаимодействие устроено так, что фирма принимает решение о переезде ДО того, как вводится пошлина. Строго говоря именно такое решение соответствует условию задачи, но жюри приняло решение засчитывать и предыдущие два без штрафов

Рассмотрим все 9 вариантов «решение о пошлине – страна расположения сада»

I. Пошлина не введена

Если сад – в стране А,  $PR=(120-q)*q-q^2-600$ ;  $q^*=30$ ;  $P^*=90$ ;  $PR^*=1800$ . Кстати, эта величина никак не зависит от пошлин, поскольку при расположении сада в стране А, импорт не происходит

Если сад – в стране В, оптимизация устроена аналогично пункту А,  $PR^*=2400$

Если сад – в стране С, всё в точности совпадает с пунктом А,  $PR=2400$

II. Введена пошлина на импорт из страны С

Если сад – в стране А,  $PR=1800$

Если сад – в стране В,  $PR=2400$ , ведь на страну В пошлина по-прежнему не действует

Если сад – в стране С,  $PR=(120-q-24)*q-0,5*q^2$ ;  $q^*=32$ ;  $P^*=88$ ;  $PR=1536$

III. Введена пошлина на любой импорт

Если сад – в стране А,  $PR=1800$

Если сад – в стране В,  $PR=1536$ , т.к. оптимизация аналогична оптимизации для сада в стране С с пошлиной

Если сад – в стране С,  $PR=(120-q-24)*q-0,5*q^2$ ;  $q^*=32$ ;  $P^*=88$ ;  $PR=1536$

Соберём все полученные результаты в табличку:

Оптимальная прибыль фирмы	Пошлины нет	Пошлина на импорт из С	Пошлина на любой импорт	Минимальная прибыль
Сад в стране А	1800	1800	1800	1200
Сад в стране В	2400	2400	1536	936
Сад в стране С	2400	1536	1536	1536

Фирма выбирает вариант с максимальной минимальной прибылью, а это страна С или страна В и прибыль 1536.

**Ответ: сад будет расположен в стране С или В, объём равен 32 или 40**

**По 2 балла ставилось за нахождение прибыли в каждом из сочетаний «страна – вид пошлины» (итого 18). При этом не важно, находил ли участник отдельно прибыль для каждого из девяти вариантов, или сразу обосновывал, что в некоторых случаях она совпадает и находил для них вместе. В таком случае баллы ставились и за те случаи, которые были обосновано отброшены участником.**

**5 баллов за корректное описание и применение минимаксного критерия, даже если до этого были получены некорректные значения прибылей**

**3 балла за правильный ответ (ставится только при корректном решении на всех этапах этого пункта)**

В) Посчитаем ожидаемую прибыль от размещения сада в каждой из стран:

**(1) Плата 600 существует в любом случае**

Оптимальная прибыль фирмы	Пошлины нет	Пошлина на импорт из С	Пошлина на любой импорт	Ожидаемая прибыль
Сад в стране А	1200	1200	1200	1200
Сад в стране В	1800	1800	936	$1800/12+1800*5/6+936/12=1728$
Сад в стране С	2400	1536	1536	$2400/12+1536*5/6+1536/12=1608$

**Ответ: сад будет расположен в стране В, объём равен 32 или 40**

**(2) Плату 600 надо платить только в том случае, если какая-либо пошлина была введена**

Оптимальная прибыль фирмы	Пошлины нет	Пошлина на импорт из С	Пошлина на любой импорт	Ожидаемая прибыль
Сад в стране А	1800	1200	1200	1250
Сад в стране В	2400	1800	936	$2400/12+1800*5/6+936/12=1778$
Сад в стране С	2400	1536	1536	$2400/12+1536*5/6+1536/12=1608$

**Ответ: сад будет расположен в стране В, объём равен 32 или 40**

**(3) Плата 600 не выплачивается никогда**

Оптимальная прибыль фирмы	Пошлины нет	Пошлина на импорт из С	Пошлина на любой импорт	Ожидаемая прибыль
Сад в стране А	1800	1800	1800	1800
Сад в стране В	2400	2400	1536	$2400/12+2400*5/6+1536/12=1928$
Сад в стране С	2400	1536	1536	$2400/12+1536*5/6+1536/12=1608$

**Ответ: сад будет расположен в стране В, объём равен 32 или 40**

**По 3 балла ставилось за расчёт ожидаемой прибыли для каждой страны**

**2 балла за ответ**

*Если была допущена арифметическая ошибка, то не ставились баллы за соответствующую прибыль, остальная задача проверялась с учетом этой арифметической ошибки*

*За отсутствие обоснования достаточного условия максимума баллы не снижались*

#### Задача 4 «Обмен двух благ»

(А) В исходном распределении у Ани  $(c, b) = (8, 2)$ , у Бори  $(c, b) = (2, 8)$ . Тогда

$$U_A(8, 2) = 2 \cdot 8 + 2 = 18, \quad U_B(2, 8) = 2 + 2 \cdot 8 = 18.$$

(Б) После обмена, при котором Аня отдаёт  $x$  печений и получает  $y$  конфет, получаем:

$$(c_A, b_A) = (8 + y, 2 - x), \quad (c_B, b_B) = (2 - y, 8 + x).$$

Полезности после обмена:

$$U_A' = U_A(8 + y, 2 - x) = 2(8 + y) + (2 - x) = 18 + 2y - x,$$

$$U_B' = U_B(2 - y, 8 + x) = (2 - y) + 2(8 + x) = 18 + 2x - y.$$

Обмен взаимовыгоден тогда и только тогда, когда

$$U_A' \geq 18 \iff 2y - x \geq 0 \iff x \leq 2y,$$

$$U_B' \geq 18 \iff 2x - y \geq 0 \iff y \leq 2x.$$

Имеем:  $y \leq x \leq 2y$ . Так как  $x > 0$  и  $y > 0$  принимают значение либо 1, либо 2, так как больше конфет и печенья для обмена нет, то имеем:

$$(x, y) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

То есть любой обмен будет взаимовыгодным.

(В) Рассмотрим произвольное распределение, где у Ани  $(c_A, b_A)$ , у Бори  $(c_B, b_B)$ .

Если  $b_A \geq 1$  и  $c_B \geq 1$ , то возможен обмен  $(x, y) = (1, 1)$ , и он взаимовыгоден, поскольку при таком обмене

$$\Delta U_A = 2 \cdot 1 - 1 = 1 > 0, \quad \Delta U_B = 2 \cdot 1 - 1 = 1 > 0.$$

Следовательно, чтобы распределение было устойчивым, необходимо:

$$b_A = 0 \quad \text{или} \quad c_B = 0.$$

Если  $b_A = 0$  или  $c_B = 0$ , то ни один обмен невозможен по количествам, так как у Ани нет печенья или у Бори нет конфет. Следовательно, взаимовыгодных обменов не существует, и такое распределение является устойчивым.

Это означает, что устойчивыми являются все ситуации, в которых у Бори либо *все печенья* (а конфет может быть сколько угодно), либо *нет ни одной конфеты* (а печенья может быть сколько угодно). В этих случаях обмен просто невозможен.

В терминах количества благ у Бори это означает, что устойчивые распределения — все пары  $(c_B, b_B) = (t, 10)$  для  $t = 0, 1, \dots, 10$  или  $(c_B, b_B) = (0, s)$  для  $s = 0, 1, \dots, 10$ .

(Г) По определению устойчивости не существует обмена, который одновременно строго увеличивает полезность Ани и полезность Бори. Поэтому если попытаться улучшить положение одного ученика, не ухудшая положение другого, то это означало бы существование взаимовыгодного обмена, что противоречит устойчивости.

#### Критерии оценивания.

(А) **5 баллов**

- (1 балл) Корректно записано исходное распределение благ у Ани и Бори. Не обязательно выписывать явно, достаточно того, что распределение понятно из решения.
- (2 балла) Верно посчитана полезность Ани в исходном распределении.

- **(2 балла)** Верно посчитана полезность Бори в исходном распределении.

*Замечание:* допускаются любые эквивалентные вычисления. При арифметической ошибке снимается соответствующая часть баллов, остальные пункты могут оцениваться независимо.

**(Б) 15 баллов**

- **(3 балла)** Корректно описан обмен через переменные  $x$ ,  $y$  и записано новое распределение благ после обмена (кто что отдаёт и что получает).
- **(4 балла)** Верно выписаны полезности после обмена  $Ua'$  и  $UB'$  (или эквивалентные выражения /неравенства).
- **(5 баллов)** Получено и корректно обосновано условие взаимной выгоды (строгое улучшение для обоих или не ухудшение/улучшение — в соответствии с формулировкой задачи), выведены соответствующие неравенства на  $x$ ,  $y$ .
- **(3 балла)** Учтены ограничения целочисленности и ограниченности ресурсов (допустимые значения  $x$ ,  $y$ ), сделан корректный вывод о том, какие обмены возможны/взаимовыгодны.
- Если в ответе присутствует вариант  $(0;0)$ , то баллы за ответ не начисляются, поскольку в рамках перебора рассматриваются строго положительные значения  $x$  и  $y$  (обмен предполагает передачу ненулевых количеств)

*Частичные баллы:* если верно получено условие для одного участника (например, только  $U' \geq U_A$ ), начисляется до половины баллов за пункт про условия взаимной выгоды.

**Дополнительный комментарий:**

В пункте (Б) допускается перебор всех допустимых пар целых значений  $(x,y)$ , где  $x$  – сколько печений Аня отдаёт, а  $y$  – сколько конфет она получает. В исходном распределении у Ани 2 печенья, у Бори 2 конфеты, поэтому при строгих ограничениях  $x > 0$  и  $y > 0$  получаем, что есть всего 4 случая для перебора:  $(1,1)$ ,  $(1,2)$ ,  $(2,1)$ ,  $(2,2)$ .

- 3 балла присуждаются за обоснование границ перебора, то есть за объяснение, почему достаточно рассмотреть ровно 4 пары  $(x,y)$ .
- Оставшиеся 12 баллов распределяются за корректный разбор случаев: по 3 балла за каждый верно рассмотренный случай (всего 4 случая).

**(В) 15 баллов**

- **(5 баллов)** Верно показано, что если у Ани есть хотя бы одно печенье и у Бори есть хотя бы одна конфета (то есть  $b_A \geq 1$  и  $c_B \geq 1$ ), то существует взаимовыгодный обмен (например,  $(x, y) = (1, 1)$ ) и он действительно повышает полезности обоих (вычислением приращений полезности или эквивалентным обоснованием).
- **(4 балла)** Сделан правильный вывод о *необходимом* условии устойчивости из предыдущего пункта: для устойчивости должно выполняться  $b_A = 0$  или  $c_B = 0$  (то есть один из участников не может физически совершить обмен).

- **(4 балла)** Показана *достаточность* условия  $b_A = 0$  или  $c_B = 0$ : при выполнении хотя бы одного из этих равенств ни один допустимый обмен невозможен по количествам, следовательно, взаимовыгодных обменов не существует, и распределение устойчиво.
- **(2 балла)** Верно сформулирован ответ.

**(Г) 5 баллов**

- **(3 балла)** Корректно установлена связь между устойчивостью и Парето-улучшением в контексте задачи: если существует изменение, улучшающее положение одного и не ухудшающее другого, то это соответствует существованию взаимовыгодного обмена (или приводит к нему), что противоречит устойчивости.
- **(2 балла)** Аргумент изложен логично и завершён: явно указано противоречие с определением устойчивости и сделан вывод