

10—11 класс

# Второй этап

## Первый день

Дата написания	<b>21 февраля 2015 г.</b>
Количество заданий	<b>8</b>
Сумма баллов	<b>100</b>
Время написания	<b>3 часа</b>

*Не пытайтесь читать задания до объявления начала написания тура.*

---

*Решения заданий выполняются на отдельном бланке.*

**Задачи 1—4 требуют только записи ответа, решение не проверяется.****Задача 1. Вклад Марьи****(5 баллов)**

В день своего восемнадцатилетия Марья открыла вклад в банке и положила на него некоторую сумму. Банк начислял на сумму вклада 10 % в конце каждого года перед очередным Днем рождения Марьи и прибавлял эти проценты к основной сумме (каждый следующий год проценты начислялись на бóльшую сумму, чем предыдущий). В каждый свой День рождения Марья добавляла на вклад 10 000 рублей, никаких других операций с деньгами на вкладе не производилось. Когда Марье исполнилось 22 года, она впервые не стала добавлять 10 000 рублей ко вкладу, а закрыла его. В этот момент на вкладе было 80 333 рубля. Какую сумму нужно было бы Марье положить в банк в день своего восемнадцатилетия, чтобы она принесла столько же денег за 4 года без пополнений вклада? Запишите ответ в рублях, при необходимости округлив его до целых.

**Задача 2. Девяносто девять цен****(5 баллов)**

В магазине продаются 99 разных товаров. Магазин закупает товар  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 99$ ) по цене  $500/i$  рублей. Если магазин назначит цену  $p$  на товар  $i$ , покупатели купят  $i/p^2$  единиц этого товара. Магазин стремится получить максимальную прибыль (разницу между своими доходами и своими расходами на закупку) от перепродажи товаров. Допустим, магазин может назначать на товары любые цены. Какую цену он назначит на товар с номером  $i$ ?

**Задача 3. Двойной пирог****(5 баллов)**

Агриппина и Валентин делят вкусный пирог. Пирог представляет собой прямоугольник  $100 \text{ см} \times 10 \text{ см}$  и может быть разрезан на две части только вдоль короткой стороны так, чтобы длина каждой из сторон составляла целое число сантиметров. Одна половина пирога ( $50 \text{ см} \times 10 \text{ см}$ ) состоит из птичьего молока, а другая — из бисквита, при этом Агриппина больше любит птичье молоко, а Валентин — бисквит. Каждый из ребят из двух кусков всегда предпочитает тот, в котором больше его любимого ингредиента, а если любимого ингредиента в кусках поровну, то тот, который больше по площади.

Механизм дележа устроен следующим образом. Агриппина подбрасывает монетку, по результатам этого определяется очередность дальнейших ходов. Тот, кто выиграл жребий, разрезает пирог любым возможным способом на две части, после чего второй выбирает себе часть, а вторая часть остается разрезавшему. На сколько процентов площадь куска, доставшегося Агриппине, при благоприятном для нее исходе жребия будет больше, чем при неблагоприятном? При необходимости округлите ответ до целого числа процентов.

**Задача 4. Два ковбоя****(5 баллов)**

Два ковбоя зашли в салун. У каждого из них в кармане по 5 монет. В салуне стоит музыкальный автомат и продается молоко. Прослушивание одной песни и кружка молока стоят по одной монете, можно прослушать только целое число песен и выпить целое количество кружек молока. Кружка молока приносит каждому из ковбоев по 2 единицы удовольствия, прослушивание одной песни приносит первому ковбою 1 единицу удовольствия, а второму — 2 единицы удовольствия. (Если один из ковбоев платит за прослушивание песни, второй также слышит ее.) Каждый из ковбоев потратил все свои деньги на молоко.

На следующий день ковбои согласовали действия так, чтобы удовольствие каждого из них было строго больше, чем в первый день. Какое максимальное количество кружек молока мог при этом выпить второй ковбой во второй день?

**Задачи 5—8 требуют записи подробного решения. Все действия в решении должны быть обоснованы. Ответ без обоснования, как правило, не оценивается, даже если он правильный.**

### Задача 5. Спринтеры

(20 баллов)

Два ученика легкоатлетической школы олимпийского резерва, Аристарх и Платон, решили устроить между собой неофициальное соревнование — кто из них будет лучше бегать стометровку в течение летнего сезона. Их тренер Владимир Петрович сообщил, что в течение сезона ожидается 5 контрольных забегов, на каждом из которых будет фиксироваться время финиша Аристарха  $(a_1, \dots, a_5)$  и Платона  $(p_1, \dots, p_5)$ , где  $a_i > 0, p_i > 0$  — время финиша Аристарха и Платона на  $i$ -м забеге соответственно,  $i = 1, \dots, 5$ . Спортсмены задумались, как им определить по этим результатам, кто из них лучше бежит. Предлагается 4 схемы.

1. Аристарх предлагает посчитать среднее арифметическое результатов и сравнить их.
2. Платон считает, что справедливо было бы сравнивать между собой только лучшее время Аристарха и Платона.
3. Владимир Петрович предлагает попробовать систему, похожую на систему оценок в прыжках в воду: отбросить лучший и худший результат каждого, а оставшиеся результаты сравнить по среднему арифметическому.
4. Жена Владимира Петровича Елена Никифоровна, узнав о споре, тоже предложила свою систему сравнения результатов. Она предлагает после каждого забега рассмотреть разность результатов атлетов на этом забеге (время Аристарха минус время Платона) и прибавить ее к разнице, накопленной за предыдущие забеги. Если после 5 забегов эта накопленная разность будет положительной, то выиграл Платон, если отрицательной — Аристарх, а если нулевой, то ничья.

Будем говорить, что две системы сравнения результатов *эквивалентны*, если для любого возможного набора результатов  $(a_1, \dots, a_5)$  и  $(p_1, \dots, p_5)$ , обе системы отдадут первенство одному и тому же участнику. Какие из четырех приведенных систем сравнения результатов эквивалентны, а какие — нет? Для каждой пары либо докажете эквивалентность, либо приведите контрпример.

### Задача 6. Расселение

(20 баллов)

Алексей, Борис, Владимир и Георгий поступили в университет и получили право жить в общежитии. На данный момент в общежитии свободны как раз 4 места в 4 разных комнатах, в которых уже живут другие студенты. Ребята имеют различные предпочтения относительно соседей, с которыми они хотели бы жить, и потому различные предпочтения относительно четырех имеющихся мест. Информация о предпочтениях приведена в таблице справа.

Студент	Предпочтения
Алексей	$1 > 2 > 3 > 4$
Борис	$1 > 3 > 4 > 2$
Владимир	$3 > 1 > 2 > 4$
Георгий	$4 > 1 > 2 > 3$

Запись  $1 > 3 > 4 > 2$ , например, означает, что для Бориса первая комната лучше, чем третья, та, в свою очередь, лучше, чем четвертая, и, наконец, четвертая лучше, чем вторая.

Назовем распределение четверых ребят по комнатам *неэффективным*, если они могут поменяться комнатами так, чтобы никому не стало хуже и хотя бы одному из них стало лучше. В противном случае будем называть распределение *эффективным*.

- а) Является ли эффективным распределение (А – 2; Б – 3; В – 4; Г – 1)?
- б) Сколько всего существует эффективных распределений?

**Задача 7. Рейтинги****(20 баллов)**

Чтобы определить стоимость того или иного финансового инструмента (ценной бумаги), нужно учесть множество факторов, характеризующих как сам инструмент и его эмитента (того, кто выпустил ценную бумагу), так и общую ситуацию в экономике. Провести такую оценку, однако, иногда очень сложно, и не все инвесторы в каждом случае могут позволить себе это сделать. Чтобы лучше понять риски вложения, они зачастую опираются на рейтинг, присвоенный той или иной ценной бумаге независимым *кредитным рейтинговым агентством*. Эта оценка обычно выглядит как комбинация букв, по которой можно определить, как высоко рейтинговое агентство оценивает риски вложения в тот или иной инструмент. Например, AAA — самый лучший рейтинг (надежная, стабильная компания), а C — самый худший (вероятность банкротства очень высока). Существует две альтернативные формы устройства рынка рейтингов. При первой схеме инвесторы платят за доступ к рейтингу, при этом для компаний, которым присваиваются рейтинги, эта услуга бесплатна. При второй схеме только компания платит за получение своего рейтинга, а инвесторы имеют свободный доступ к нему.

а) Первая схема была доминирующей на рынке рейтингов до начала 1970-х годов, а после этого периода почти во всех агентствах ей на смену пришла вторая. Предположите, почему это могло произойти? Приведите один самый важный, на ваш взгляд, аргумент.

б) Есть мнение, что вторая схема подвержена конфликту интересов. Объясните, в чем он заключается.

в) В наше время есть три крупнейших мировых рейтинговых агентства: «Standard & Poor's», «Moody's Investors Service» и «Fitch Ratings» (все три американские), которые занимают примерно 95 % рынка. Новым компаниям не удастся захватить сколько-нибудь существенную рыночную долю, несмотря на то, что, казалось бы, затраты на старт подобного бизнеса не очень высоки. Предположите, что может быть таким прочным барьером для входа на рынок рейтингов?

**Задача 8. Типичные пингины****(20 баллов)**

На рынке плюшевых пингинов «Тоша» действует фирма «ВОШ», а фирма «МОШ» готовится войти на рынок и стать ее конкурентом. Взаимодействие на рынке происходит так: сначала «ВОШ» выбирает объем выпуска  $q_1 > 0$  тыс. шт. и объявляет его, а затем «МОШ», узнав объем выпуска конкурента, решает, входить на рынок или нет. Если она входит, то производит  $q_2 > 0$  тыс. шт., а если не входит, то  $q_2 = 0$ . Чтобы попасть в перечень фирм, имеющих право производить плюшевых пингинов, «МОШ» должна получить лицензию правительства («ВОШ» в лицензии не нуждается). Правительство выдает лицензии бесплатно, но только тем фирмам, у которых хорошо организовано производство, так что фирме «МОШ» придется потратить 100 тыс. рублей на начальные инвестиции, чтобы начать работать. «МОШ» решит войти на рынок, *только* если разница между доходами и расходами на производство пингинов будет *превосходить* эти затраты. Цена одного плюшевого пингина формируется исходя из объема предложения обеих фирм и равна  $P = (110 - q_1 - q_2)$  руб. Производство типичного пингина обходится любой из фирм в 10 руб., фирмы при принятии решений учитывают их последствия и стараются получить как можно большую прибыль (разницу между доходами и расходами). Сколько плюшевых пингинов произведет фирма «ВОШ»?